A Indução Eletromagnética

Metas da aula

- formular a lei de Faraday nas versões diferencial e integral;
- definir energia magnética;
- discutir o fenômeno da indução eletromagnética e o conceito de indutância;

Objetivos

Ao terminar esta aula você deverá ser capaz de:

- determinar a força eletromotriz induzida em um espira qualquer;
- determinar os coeficientes de indutância de um sistema arbitrário de espiras.

Introdução

Em 1831, uma das descobertas experimentais mais importantes do eletromagnetismo, relacionada tanto aos seus aspectos fundamentais, quanto ao domínio das aplicações tecnológicas subsequentes, foi reportada, independentemente, por Michael Faraday (Inglaterra) e Joseph Henry (Estados Unidos). Trata-se do fenômeno da *indução eletromagnética*. Como Faraday publicou seus resultados um pouco antes de Henry, a descoberta é costumeiramente creditada ao primeiro.

O fenômeno da indução pode ser verificado, qualitativamente, por meio de experiências bastante simples. Considere, como mostrado na Figura 1, uma espira condutora através da qual passa campo magnético produzido por uma bobina. Observa-se que se a espira é deslocada de sua posição original, surge corrente elétrica i (Figura 1a) na própria espira, durante o seu deslocamento. O mesmo ocorre se, alternativamente, a espira é mantida fixa e a bobina é colocada em movimento (Figura 1b). Uma terceira situação onde corrente elétrica também é induzida na espira, é aquela em que a bobina e a espira são ambas mantidas em posições fixas, porém o campo magnético gerado pela bobina varia com o tempo (Figura 1c). Faraday, brilhantemente, percebeu que os casos das Figuras 1b e 1c poderiam ser entendidos de maneira unificada, postulando-se que campos magnéticos variáveis *induzem* campos elétricos no espaço, responsáveis, em última análise, pela movimentação das cargas nas espiras. Uma nova lei do eletromagnetismo nascia.

No exemplo da Figura 11.1a, entretanto, o campo magnético não varia, mas há corrente elétrica. Haveria contradição com a proposta de Faraday? Neste caso, o aparecimento de corrente elétrica pode ser interpretado diretamente como um efeito devido à força de Lorentz sob a qual as cargas livres da espira condutora estão sujeitas quando esta se move. Notamos, entretanto, que existe uma certa "assimetria"entre as explicações das observações esquematizadas nas Figuras 1a e 1b: o movimento relativo entre bobina e espira pode ser o mesmo nos dois casos, mas as razões pelas quais a corrente elétrica é induzida seriam aparentemente diversas. As leis da física dependeriam do referencial?. De fato, este tipo de problema, levantado pelo eletromagnetismo, é um dos "estopins"da teoria da relatividade, publicada por Einstein em 1905 !

Figura 1.1: Uma bobina produz campo magnético que atravessa uma espira. Em (a) a espira se move para a direita e a bobina está fixa. Em (b) a bobina se move para a esquerda e a espira está fixa. Em (c) tanto a bobina quanto a espira estão fixas, mas o campo produzido pela bobina diminui em intensidade.

A expressão matemática do fenômeno de indução eletromagnética – a chamada lei de Faraday – é discutida na seção a seguir e explorada ao longo desta aula. Veremos, ao final da aula, que inúmeras aplicações de grande relevância tecnológica baseiam-se no fenômeno da indução eletromagnética.

A lei de Faraday

Leis físicas são o fruto de empirismo e conjectura. A evolução da ciência se dá, via de regra, de modo desordenado, muito menos sistemático e metodológico do que poderiamos imaginar da leitura de tratados acadêmicos. A intrincada rede de caminhos trilhados e as motivações subjacentes a uma descoberta científica dificilmente são preservados como legado cultural. Apesar de haver quem lamente este fato (não sem razão), ele nos dá uma certa liberdade para conduzir a discussão de um novo assunto sob a luz de contextos diversos e mais atuais. Com esse espírito, faremos aqui uma introdução à lei de Faraday com um sabor mais abstrato (sem, obviamente, nos esquecermos da conexão com a experiência!). Nosso interesse é ilustrar, propositadamente, o enorme grau de síntese alcançado no eletromagnetismo – e almejado pela física teórica como um todo – que consiste em oferecer um modelo do universo dos fenômenos, baseado em um número reduzido de leis formuladas em linguagem matemática.

A Lei de Faraday é escrita, em sua formulação diferencial, como

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \ . \tag{1.1}$$

Uma consequência imediata desta equação tão compacta é que a variação temporal de campo magnético estará ligada, inevitavelmente, à existência de campo elétrico. A Equação (1.1) nos diz algo ainda mais forte: como o rotacional do campo elétrico poderá ser diferente de zero, o campo elétrico não será conservativo nestas condições. Em outras palavras, não será possível expressar o campo elétrico como o gradiente de um campo de potencial elétrico (se isso fosse possível, a lei de Faraday não seria válida, pois o rotacional de um gradiente é nulo). Estamos afirmando, essencialmente, que nem todo o campo elétrico é produzido apenas por cargas elétricas via lei de Coulomb. Campos magnéticos variáveis também são capazes de produzir campos elétricos e é aqui que a lei de Faraday torna-se importante.

Para obter a versão integral da Lei de Faraday, observemos a Figura 11.2. Ali representamos um contorno fechado orientado, Γ, que limita uma superfície S, com orientação induzida por aquela de Γ, através da qual passa campo magnético, não necessariamente estático. Pela lei de Faraday, sabemos que variações temporais do campo magnético estarão ligadas, localmente, à existência de campo elétrico. Por outro lado, o teorema de Stokes (ver Aula 2) nos garante que o fluxo do rotacional do campo elétrico assim produzido em S será igual à circulação deste mesmo campo ao longo do contorno Γ, isto é,

$$\int_S d^2\vec{s} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E} = \oint_\Gamma d\vec{r} \cdot \vec{E} \ , \tag{1.2}$$

onde $d^2\vec{s} = \hat{n}$ dA. A lei de Faraday, Equação (1.1), nos dá, adicionalmente,

$$\int_S d^2\vec{s} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\int_S d^2\vec{s} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{d}{dt}\int_S d^2\vec{s} \cdot \vec{B} \ . \tag{1.3}$$

Combinando (1.2) e (1.3), obtemos a formulação integral da lei de Faraday,

$$\oint_\Gamma d\vec{r} \cdot \vec{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \ , \tag{1.4}$$

onde

$$\Phi_B \equiv \int_S d^2\vec{s} \cdot \vec{B} \tag{1.5}$$

é o fluxo do campo magnético através da superfície orientada S.

Figura 1.2: O contorno fechado e orientado Γ é a borda de uma superfície S. A orientação de S é determinada pela orientação de Γ. Um campo magnético varável no tempo $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t)$ existe na região considerada. O campo elétrico induzido não está representado na figura.

Examinando a formulação integral da lei de Faraday, podemos concluir que esta só faz sentido se o fluxo de campo magnético não depender da escolha da superfície S – de fato, há uma infinidade de superfícies limitadas pelo mesmo contorno Γ. Consideremos, portanto, duas superfícies, S_1 e S_2, limitas por Γ, de tal forma que a união delas seja uma superfície fechada. Veja a Figura 11.3. Para que a lei de Faraday seja consistente, devemos ter

$$\int_{S_1} d^2\vec{s} \cdot \vec{B} = \int_{S_2} d^2\vec{s} \cdot \vec{B} \ , \tag{1.6}$$

ou seja,

$$\int_{S_1} d^2\vec{s} \cdot \vec{B} = -\int_{\bar{S}_2} d^2\vec{s} \cdot \vec{B} \ , \tag{1.7}$$

onde $\bar{S}_2$ representa uma superfície idêntica à S_2 porém com orientação oposta. Note que a união das superfícies orientadas S_1 e $\bar{S}_2$ nos dá uma superfície S fechada e orientada. A Equação (1.7) pode ser re-escrita como

$$\int_{S_1} d^2\vec{s} \cdot \vec{B} + \int_{\bar{S}_2} d^2\vec{s} \cdot \vec{B} = \int_S d^2\vec{s} \cdot \vec{B} = 0 \ . \tag{1.8}$$

Figura 1.3: As superfícies S_1 e S_2, ambas com borda Γ, particionam uma superfície fechada.

Concluimos, dessa maneira, que o fluxo do campo magnético será sempre nulo para uma superfíce fechada qualquer. Este resultado, implica, de acordo com o teorema de Gauss, que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \ . \tag{1.9}$$

É interessante comparar a equação acima com a lei de Gauss (Aula 4), onde se estabelece a proporcionalidade entre a divergência do campo elétrico e a densidade de carga elétrica. Interpretamos, então, a Equação (1.9) de forma análoga afirmando que não existem "cargas magnéticas"na natureza. Esta é uma predição muito forte do eletromagnetismo clássico, ainda hoje em acordo com a observação. Entretanto, conjectura-se, no domínio da teoria quântica de campos, a existência de partículas dotadas de carga magnética, os chamados *monopólos magnéticos* que poderiam ter desempenhado um papel importante nos estágios iniciais da evolução do universo.

Força eletromotriz induzida

O lado esquerdo da Equação (1.4) admite, surpreendentemente, uma interpretação física direta. Considere um espira condutora Γ fechada, sujeita à presença de um campo magnético variável. Podemos nos referir à Figura 11.2 novamente, entendendo que agora Γ representa a espira condutora, um objeto material. O campo magnético variável induz, de acordo com a lei de Faraday, um campo elétrico no espaço que, por sua vez fará com que as cargas elétricas no condutor sejam movimentadas, originando corrente elétrica na espira.

Seja ΔW o trabalho total realizado pelo campo elétrico (qualquer que seja a sua origem) sobre **todas** as cargas do sistema, quando uma certa quantidade ΔQ de carga atravessa uma seção reta qualquer do condutor. Denota-se por força eletromotriz (fem), $\mathcal{E}$, o trabalho por unidade de carga

$\Delta W/\Delta Q$:

$$\mathcal{E} \equiv \frac{\Delta W}{\Delta Q} \ . \tag{1.10}$$

Observe que o produto da força eletromotriz pela quantidade de carga que flui através da seção reta do condutor nos dá a quantidade total de energia que foi fornecida pelo campo elétrico ao condutor. Suponhamos, para simplificar, que a espira possua N cargas livres, todas iguais a q. Ao deslocaram-se todas as cargas de um comprimento Δs ao longo da espira, teremos

$$N_0 q \mathcal{E} = \sum_{i=1}^{N} q \vec{E} \cdot \Delta \vec{r}_i \ , \tag{1.11}$$

onde $N_0 q$ é a quantidade de carga que atravessa uma seção reta do condutor e $\Delta \vec{r}_i$ denota o deslocamento da i-ésima carga, com $|\Delta \vec{r}_i| = \Delta s$. Fica claro, supondo uma distribuição homogênea de cargas, que N_0 é o número de cargas contidas em uma extensão Δs da espira. Se Δs for suficientemente pequeno, podemos imaginar que os vários segmentos de fio de extensão Δs gerarão um linha poligonal fechada, dada por vetores $\Delta \vec{s}_i$, onde $1 \leq i \leq N/N_0$. Veja a Figura 11.4.

Figura 1.4: A espira é particionada em N/N_0 segmentos de extensão Δs, cada qual contendo N_0 portadores de carga.

Re-escrevemos, então, a equação acima como

$$N_0 q \mathcal{E} = N_0 \sum_{i=1}^{N/N_0} q \vec{E} \cdot \Delta \vec{s}_i \ , \tag{1.12}$$

isto é, no limite em que $\Delta s \to 0$,

$$\mathcal{E} = \oint_{\Gamma} d\vec{r} \cdot \vec{E} \ . \tag{1.13}$$

Descobrimos, portanto, que o lado esquerdo da lei de Faraday na sua versão (1.4) é idêntica à força eletromotriz induzida sobre uma espira. Este resultado torna a lei de Faraday extremamente adequada à verificação experimental, como as atividades a seguir sugerem.

Atividade 1

Um circuito fechado situado no plano xy possui uma resistência R ligada a uma bateria que produz diferença de potencial V. Suponha que uma bobina de seção reta de área A atravesse o circuito e que o campo magnético assim gerado seja dado por:

$$\vec{B} = ae^{-bt}\hat{z} \ , \tag{1.14}$$

onde t denota a variável de tempo. A figura 11.5 ilustra a configuração. Determine a corrente $i = i(t)$ que flui no circuito.

Figura 1.5: Circuito com fonte e resistência sujeito a um campo magnético variável.

Resposta comentada

O resistor dissipa potência Ri^2. A energia dissipada pelo resistor deve corresponder exatamente àquela gerada pela bateria e pela indução de fem no circuito.

Orientando o circuito no sentido anti-horário, o fluxo de campo magnético sobre uma superfície limitada pelo circuito será

$$\Phi(t) = aAe^{-bt} \ . \tag{1.15}$$

A fem induzida sobre o circuito é, aplicando a lei de Faraday,

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt}\Phi(t) = -abAe^{-bt} \ . \tag{1.16}$$

O sinal negativo acima indica que o trabalho realizado pela fem opõe-se ao trabalho realizado pela bateria (para a disposição da bateria mostrada na Figura 11.5). Isto é, a fem induzida "procura"fazer a corrente circular no sentido horário, enquanto a bateria "procura"fazer a corrente circular no sentido oposto, neste particular exemplo. A potência produzida pelo sistema fem/bateria é $(V + \mathcal{E})i$. Como essa potência deve ser dissipada no resistor, obtemos

$$(V + \mathcal{E})i = Ri^2 \tag{1.17}$$

e assim,

$$i(t) = \frac{1}{R}(V - abAe^{-bt}) \ . \tag{1.18}$$

Fim da atividade

Atividade 2

Uma região quadrada de lado L no plano xy é atravessada por um campo magnético $\vec{B} = -B\hat{z}$. Uma espira retangular de lados a e b e resistência R é retirada desta região com velocidade constante $\vec{v} = v\hat{x}$. Veja a Figura 11.6. Determine a força exercida sobre a espira durante o processo de remoção.

Figura 1.6: Uma espira retangular é removida de uma região de campo magnético.

Resposta comentada

Orientemos o contorno da espira no sentido anti-horário. Ao se remover a espira, o fluxo do campo magnético varia com taxa

$$\frac{d\phi}{dt} = bvB \ . \tag{1.19}$$

Pela lei de Faraday, a fem induzida sobre a espira é $\mathcal{E} = -bvB$. Como a resistência da espira é R, a corrente elétrica que circula por ela será $i = -bvB/R$. O sinal negativo de i indica que a corrente circula no sentido horário. A força magnética que atua sobre a espira é

$$\vec{F}_B = -\frac{bvB^2}{R}\hat{x} \ . \tag{1.20}$$

A força que o agente externo deve fazer para que a espira seja removida com velocidade v é, portanto,

$$\vec{F} = -\vec{F}_B = \frac{bvB^2}{R}\hat{x} \ . \tag{1.21}$$

Fim da atividade

A lei de Lenz

Uma interpretação interessante sobre o sinal negativo que aparece na lei de Faraday é fornecida pela *lei de Lenz*, formulada em 1833 por H. Lenz:

Correntes induzidas produzem campos magnéticos que se opõem às variações de campo magnético que as induziram.

A lei de Lenz é, na realidade, uma versão qualitativa da lei de Faraday e possui grande utilidade por nos permitir obter rapidamente os sentidos das correntes induzidas em um dado experimento, sem que precisemos recorrer ao formalismo completo da lei de Faraday. Retornando à Figura 11.1c, por exemplo, notamos que a corrente induzida na espira possui aquele sentido específico pois apenas dessa maneira produzirá um campo magnético que tende a compensar a diminuição do campo magnético externo, gerado pela bobina. Reflita, usando a lei de Lenz, sobre os casos 11.1a e 11.1b.

É importante observarmos que a lei de Lenz é mais do que mera regra mnemônica. Ela está ligada ao princípio de conservação da energia. Para entender esta conexão, imagine um imã que cai (despreze o atrito com o ar) com o seu pólo norte voltado para uma espira circular que está presa a uma superfície horizontal. Como as linhas de campo magnético saem do pólo norte, o fluxo (para baixo) de campo magnético sobre a espira aumenta à medida em que o imã se aproxima da primeira. A lei de Lenz prevê que o sentido da corrente induzida na espira será anti-horário, ao olharmos a espira por sobre a superfície onde está presa. Supondo, por absurdo, que a indução de corrente ocorresse no sentido oposto, contrariando a lei de Lenz, iriamos encontrar uma situação paradoxal. Neste último caso, a espira produziria campo magnético similar ao de um imã com o seu pólo sul voltado para cima. Isto faria com que o imã fosse atraido para a espira, fazendo com que sua velocidade fosse maior do que a prevista pela lei do movimento de queda livre, em desacordo com o princípio da conservação da energia.

Indutância

Uma espira é, em termos práticos, um fio elétrico de configuração arbitrária, onde a entrada de corrente está muito próxima da saída. Se a corrente elétrica for variável no tempo, o fluxo magnético produzido pela espira sobre si própria irá variar. Pela lei de Faraday, consequentemente, haverá *autoindução* de fem, $\mathcal{E}$, sobre a espira. Se a corrente que circula é i, a potência fornecida (ou absorvida) à espira será $P = \mathcal{E}i$. De fato, como vimos anteriormente, havendo fluxo de carga Δq através de uma seção reta qualquer da espira, durante o intervalo de tempo Δt, o trabalho realizado pela fem será $\mathcal{E}\Delta q = \mathcal{E}i\Delta t \equiv P\Delta t$.

Tratando o campo magnético em uma aproximação quase-estática, imaginamos que em todos os instantes de tempo o campo magnético produzido pela espira seja dado pela lei de Biot-Savart, como se a corrente elétrica fosse constante. Não é nosso interesse discutir aqui quando a aproximação quase-estática é boa ou não, mas é razoável supor que ela possa ser aplicada em situações de interesse concreto (como realmente acontece!). Na verdade, neste momento do curso não teriamos ainda os elementos para uma análise da aproximação quase-estática. Vale saber, entretanto, que correntes que variam muito rapidamente no tempo produzem ondas eletromagnéticas e o problema de autoindução acabaria se tornando muito complicado (talvez intratável).

O uso da lei de Biot-Savart para o cálculo do campo produzido pela espira implica que o fluxo magnético $\Phi_B(t)$ sobre a superfície limitada pela própria espira será proporcional à sua corrente $i(t)$. Podemos escrever

$$\Phi_B(t) = Li(t) \ . \tag{1.22}$$

A constante de proporcionalidade L chama-se de *autoindutância* da espira. Para obter a expressão geral de L, considere uma espira c, por onde passa corrente i, tal como aquela mostrada na Figura 11.7. O campo magnético produzido pela espira pode ser escrito, usando a Lei de Biot-Savart, como

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint_c \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3} \ , \tag{1.23}$$

onde $\vec{r}$ é o vetor que liga os elementos de deslocamento infinitesimais $d\vec{s}$ sobre o circuito da espira ao ponto $P = (x, y, z)$ do espaço.

Como o campo magnético possui divergência nula, este pode ser escrito, em geral, como o rotacional de um outro campo, que chamaremos de *potencial vetor* $\vec{A}$ (veja a aula 9):

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \ . \tag{1.24}$$

Vamos mostrar agora que o potencial vetor associado ao campo produzido pela espira, Eq. (1.23) é, simplesmente,

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint_c \frac{d\vec{s}}{r} \ . \tag{1.25}$$

Figura 1.7: Espira c que conduz corrente i e produz campo magnético $\vec{B}$.

De fato, seja

$$\vec{r} = [x - x(s)]\hat{x} + [y - y(s)]\hat{y} + [z - z(s)]\hat{z} \ . \tag{1.26}$$

Obtemos, então,

$$\vec{\nabla} r = -\frac{\vec{r}}{r^2} \ , \tag{1.27}$$

o que nos leva a

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint_c \vec{\nabla} \times \left[\frac{d\vec{s}}{r}\right] \\ &= \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint_c \frac{d\vec{s} \times \vec{\nabla} r}{r^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint_c \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3} \ , \end{aligned} \tag{1.28}$$

em acordo com (1.23).

O potencial vetor é de grande utilidade no cálculo da autoindutância, pois permite escrever o fluxo do campo magnético Φ_B sobre uma superfície S limitada pela espira como uma integral de linha, ao evocarmos o teorema de Stokes. Em outras palavras, temos

$$\Phi_B = \int_S d^2\vec{s} \cdot \vec{B} = \int_S d^2\vec{s} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint_c d\vec{s} \cdot \vec{A} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint_c \oint_c \frac{d\vec{s}_1 \cdot d\vec{s}_2}{r} \ . \tag{1.29}$$

Note que o teorema de Stokes foi usado na terceira igualdade acima, enquanto que a Eq. (1.25) é usada na quarta igualdade. O resultado final é uma integral dupla de linha!. A definição de autoindutância, Eq. (1.22), nos dá, portanto,

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_c \oint_c \frac{d\vec{s}_1 \cdot d\vec{s}_2}{r} \ . \tag{1.30}$$

Essa expressão nos mostra claramente que a autoindutância depende apenas da conformação da espira, ou seja, de como ela se enovela no espaço – informalmente, dizemos que L depende da "geometria da espira".

A discussão precendente pode ser generalizada para um conjunto de espiras, introduzindo-se o conceito de *indutância mútua* entre espiras. Imagine duas espiras arbitrárias c_1 e c_2, por onde passam correntes i_1 e i_2, respectivamente. O fluxo de campo magnético Φ_{12} produzido pela espira c_2 sobre uma superfície qualquer S_1 limitada pela espira c_1 será proporcional à corrente i_1. Isto é,

$$\Phi_{12} = M_{12} i_2 \ . \tag{1.31}$$

Analogamente, podemos escrever

$$\Phi_{21} = M_{21} i_1 \ . \tag{1.32}$$

O coeficiente M_{ij} chama-se de *indutância mútua* da espira i em relação à espira j. Seguindo os mesmo passos para a dedução da Expressão (1.30), obtemos, agora,

$$M_{ij} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{c_i} \oint_{c_j} \frac{d\vec{s}_1 \cdot d\vec{s}_2}{r} \ . \tag{1.33}$$

A Eq. (1.33) nos diz, imediatamente, que $M_{ij} = M_{ji}$, isto é, as indutâncias mútuas são simétricas. Curiosamente, em muitos problemas de ordem prática, é comum ser mais fácil calcular uma das indutâncias mútuas do que a outra. Veremos um exemplo mais adiante.

Seja um sistema de espiras c_1, c_2, ..., c_N por onde passam correntes variáveis no tempo $i_1(t)$, $i_2(t)$, ..., $i_N(t)$, respectivamente. A lei de Faraday nos permite escrever a fem induzida sobre a m-ésima espira como

$$\mathcal{E}_m = -\frac{d}{dt}\Phi_m(t) \ , \tag{1.34}$$

onde Φ_m é o fluxo magnético total sobre a espira. Agora, pelo princípio de superposição, fica claro que

$$\Phi_m(t) = \sum_{n=1}^{N} M_{mn} i_n(t) \tag{1.35}$$

e, assim,

$$\mathcal{E}_m = -\sum_{n=1}^{N} M_{mn} \frac{di_n}{dt} \ . \tag{1.36}$$

Observe aqui que M_{mm} é precisamente a autoindutância da m-ésima espira. Inúmeros dispositivos elétricos fazem grande proveito da lei de Faraday, tal como traduzida na expressão acima. Não estaremos exagerando ao afirmar que trata-se de um dos pilares de toda a nossa tecnologia atual. Antes de discutirmos alguns exemplos, vamos ilustrar o cálculo da indutância em dois casos simples, porém não desprovidos de importância.

Atividade 3

Determine a indutância por unidade de comprimento de um solenóide infinito.

Resposta comentada

Considere um solenóide de seção reta de área A e n voltas de fio por unidade de comprimento, por onde passa corrente i. Sabemos que o campo magnético produzido pelo solenóide é paralelo ao seu eixo de simetria e vale $B = \mu_0 ni$. O fluxo de campo magnético, sobre uma superfície limitada por uma seção reta do solenóide, é $BA = \mu_0 niA$. Em um comprimento ℓ do solenóide existem $n\ell$ espiras, de forma que o fluxo magnético total será $\Phi_B = \mu_0 n^2 \ell iA$. Dessa maneira, usando que $\Phi_B = Li$, obtemos que a indutância por unidade de comprimento é $L/\ell = \mu_0 n^2 A$.

Fim da atividade

Atividade 4

Determine a indutância mútua de duas espiras circulares concêntricas de raios R_1 e R_2, no limite em que $R_1 \ll R_2$.

Resposta comentada

Seria muito complicado determinar o campo magnético produzido pela espira menor sobre toda a extensão planar limitada pela espira maior. Entretanto, é razoavelmente simples estimar o campo produzido pela espira maior sobre a espira menor. Como $R_1 \ll R_2$, podemos supor que o campo magnético produzido pela espira maior sobre a extensão da espira menor seja aproximadamente uniforme. Seja i a corrente na espira maior. O campo produzido por esta espira no centro de simetria é (veja a Aula 8)

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2R_2}\hat{z} \ . \tag{1.37}$$

Estamos supondo aqui, sem perda de generalidade, que a espira seja paralela ao plano xy e que a corrente i circule no sentido anti-horário. O fluxo de campo magnéticos obre a espira menor é, então, aproximadamente

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 i \pi R_1^2}{2R_2} \ , \tag{1.38}$$

de onde se deduz que a indutância mútua entre as duas espiras é

$$M = \frac{\mu_0 \pi R_1^2}{2R_2} \ . \tag{1.39}$$

Fim da atividade

Um *indutor* é um dispositivo que produz fem a partir de variações de corrente elétrica (uma bobina, na prática). Um indutor de indutância L

ligado em série a um capacitor de capacitância C (Figura 11.8) constitui um circuito eletrônico fundamental. Desprezando efeitos de dissipação, a corrente elétrica $i(t)$ (e também a carga $q(t)$ acumulada no capacitor) irá oscilar harmonicamente no tempo com frequência angular $\omega = 1\sqrt{LC}$. Se, como indicado na Figura 11.8, a corrente que flui pelo circuito é $i(t)$, a fem autoinduzida no indutor é $\mathcal{E}_L$ e uma das placas do capacitor possui carga positiva $q(t)$, podemos escrever:

$$\mathcal{E}_L i = \frac{d}{dt}\frac{q^2}{2C} \ , \tag{1.40}$$

isto é, a potência produzida pelo indutor deve ser, pela lei de conservação da energia, igual a potência transferida para o capacitor. Usando que $i = dq/dt$ e $\mathcal{E}_L = -Ldi/dt$, a Eq. (1.40) pode ser re-escrita, então, como

$$\frac{d^2q}{dt^2} = -\omega^2 q \ , \tag{1.41}$$

onde $\omega^2 = 1/LC$. Esta é exatamente a famosa equação do oscilador harmônico!. A solução mais geral para a carga é dada por

$$q(t) = A\cos(\omega t + \phi) \ , \tag{1.42}$$

onde a amplitude $A > 0$ e a constante de fase ϕ são parâmetros arbitrários, definidos a partir das condições iniciais de corrente e carga no circuito.

Figura 1.8: Circuito LC sem fonte de força eletromotriz.

Atividade 5

Considere um circuito oscilante LC que possuia, no instante inicial $t = 0$, corrente nula e carga Q_0 acumulada no capacitor.

(i) Determine a carga e a corrente no circuito como uma função do tempo.

(ii) Usando a lei de conservação da energia, estabeleça uma expressão para a energia supostamente armazenada no indutor, como função de sua indutância e da corrente $i(t)$.

Resposta comentada

(i) A corrente elétrica é dada, usando (1.42), por $i(t) = dq/dt = -A\omega\,\text{sen}(\omega t + \phi)$. As condições iniciais $q(0) = Q_0$ e $i(0) = 0$ implicam que $A = Q_0$ e $\phi = 0$. Temos

$$q(t) = Q_0 \cos(\omega t) \tag{1.43}$$

e

$$i(t) = -Q_0 \omega\,\text{sen}(\omega t)\ . \tag{1.44}$$

(ii) No instante inicial, na ausência de corrente elétrica, a energia acumulada pelo capacitor é

$$U = \frac{Q_0^2}{2C} \tag{1.45}$$

que é a própria energia total do circuito LC. Em um instante qualquer t, o capacitor acumula energia

$$U_C = \frac{q(t)^2}{2C} = \frac{Q_0^2}{2C}[\cos(\omega t)]^2\ . \tag{1.46}$$

A energia armazenada no indutor deve, necessariamente, ser

$$U_L = U - U_C = \frac{Q_0^2}{2C}[\text{sen}(\omega t)]^2\ . \tag{1.47}$$

Usando que $i(t) = -Q_0\omega\,\text{sen}(\omega t)$ e $\omega^2 = 1/LC$, podemos escrever

$$U_L = \frac{1}{2} L i^2(t)\ . \tag{1.48}$$

Fim da atividade

Energia magnética

A Atividade 5 nos sugere que indutores armazenam energia em seu campo magnético de forma análoga à energia que é armazenada no campo elétrico de um capacitor. Voltando-nos brevemente à eletrostática, sabemos, naquele contexto, que variações de energia armazenada no campo elétrico equivalem ao trabalho que é necessário realizar, contra o campo elétrico, para que um determinado sistema de cargas mude de uma configuração até outra qualquer. O problema semelhante a ser formulado no caso magnetostático é o seguinte: Qual é o trabalho que deve ser realizado por um agente externo, para que uma determinada configuração de correntes seja estabelecida (ou que se mude de uma configuração de correntes a outra)?

Suponha que inicialmente um sistema qualquer de espiras não apresente corrente. Vamos imaginar que a densidade de carga elétrica seja sempre nula, no decorrer desse experimento fictício. A condição de densidade de carga nula, que nos poupará aqui o cálculo do trabalho realizado por campos elétricos coulombianos, é bastante natural, pois estamos pensando em espiras condutoras. Por meio de algum processo que não nos interessa conhecer em detalhe, uma corrente elétrica é estabelecida no sistema (por exemplo, ligamos o condutor a uma bateria). A corrente elétrica que surge produz campo magnético variável no tempo e, consequentemente, pela lei de Faraday, força eletromotriz é induzida sobre o sistema, realizando trabalho sobre as cargas elétricas. Ora, como vimos, a fem induzida, $\mathcal{E}$, sobre o sistema pode ser escrita em termos de sua autoindutância L e da corrente $i(t)$, isto é, $\mathcal{E} = -Ldi/dt$. O trabalho realizado *contra* o campo elétrico será, portanto,

$$U \equiv -\int_0^\infty \mathcal{E} i = \int_0^\infty Li\frac{di}{dt} = \frac{1}{2}Li^2 \ . \tag{1.49}$$

Obtemos, então, que $U = Li^2/2$ é, em geral, a energia magnética armazenada no sistema de correntes. É importante notar aqui a analogia com a expressão $U = q^2/2C$ para a energia elétrica armazenada em um capacitor.

Na Aula 5 deduzimos uma expressão para a energia eletrostática de um sistema de cargas em termos do campo elétrico gerado por estas mesmas cargas ($U = \frac{\epsilon_0}{2}\int d^3\vec{r}\vec{E}^2$). Mostraremos, agora, que uma expressão análoga vale para o caso magnético. Considere um sistema de cargas em movimento livre no espaço. O fluido carregado é caracterizado, em cada ponto do espaço, por uma certa densidade de carga elétrica $\rho(\vec{r}, t)$ e por uma velocidade local de movimento dos elementos de carga $\vec{v}(\vec{r}, t)$. A potência transferida a um certo elemento de volume dV do sistema de cargas será

$$\frac{dP}{dV} = \rho\vec{E} \cdot \vec{v} \ , \tag{1.50}$$

pois potência é força $\times$ velocidade e a força aqui em jogo é a força elétrica. Dessa maneira, o trabalho total realizado pelo campo elétrico sobre o sistema de cargas é

$$W = \int_0^\infty dt \int d^3\vec{r}\frac{dP}{dV} = \int_0^\infty dt \int d^3\vec{r}\rho\vec{E} \cdot \vec{v} \ . \tag{1.51}$$

Note, entretanto, que a densidade de corrente é $\vec{J} = \rho\vec{v}$, com o que a expressão acima torna-se

$$W = \int_0^\infty dt \int d^3\vec{r}\vec{E} \cdot \vec{J} \ . \tag{1.52}$$

Usando a lei de Ampère, na formulação diferencial, substituimos, em (1.52), a densidade de corrente $\vec{J}$, expressando-a em termos do rotacional do campo magnético:

$$W = \frac{1}{\mu_0} \int_0^\infty dt \int d^3\vec{r}\vec{E} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} \ . \tag{1.53}$$

A Eq. (1.53) pode ser integrada por partes, fornecendo

$$W = \frac{1}{\mu_0} \int_0^\infty dt \int d^3\vec{r}\vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot \vec{B} \ . \tag{1.54}$$

O campo elétrico que aparece nesta expressão é o campo induzido por variações temporais do campo magnético produzido pelas correntes. Substituindo, então, em (1.52) o rotacional do campo elétrico tal como dado pela lei de Faraday na sua formulação diferencial, Eq. (1.1), encontramos

$$\begin{aligned} W &= -\frac{1}{\mu_0} \int_0^\infty dt \int d^3\vec{r}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{B} \\ &= -\frac{1}{2\mu_0} \int_0^\infty dt \int d^3\vec{r}\frac{\partial \vec{B}^2}{\partial t} \\ &= -\frac{1}{2\mu_0} \int d^3\vec{r}\vec{B}^2 \ . \end{aligned} \tag{1.55}$$

A energia armazenada no campo magnético – energia magnética – é o trabalho realizado contra as forças de indução, isto é, $U = -W$,

$$U = \frac{1}{2\mu_0} \int d^3\vec{r}\vec{B}^2 \ . \tag{1.56}$$

A relação acima nos sugere introduzir a *densidade de energia magnética* u:

$$u = \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2 \ . \tag{1.57}$$

Em poucas palavras, podemos dizer que um sistema de correntes produz campos magnéticos que podem ser pensados como "estoques" de energia magnética: a energia que foi usada para estabelecer as correntes do sistema.

Unindo as expressões eletrostática e magnetostática para a densidade de energia, escrevemos, para a densidade total de energia do campo eletromagnético,

$$u = \frac{\epsilon_0}{2}\vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2 \ . \tag{1.58}$$

Um pouco de reflexão e de revisão dos princípios envolvidos na definição de (1.58) nos faz ver que o resultado acima é verdadeiramente geral, valendo mesmo para campos não estacionários.

A expressão para a energia magnética, Eq. (1.56) nos indica uma maneira alternativa de se determinar a autoindutância de um sistema de correntes. O esquema de cálculo é o seguinte:

(i) Determinamos o campo magnético produzido pelas correntes;

(ii) Integramos a densidade de energia magnética u em todo o espaço para obter a energia magnética total U;

(iii) Usando $U = Li^2/2$, obtemos L.

Atividade 6

Obtenha a energia magnética por unidade de comprimento de um solenóide infinito.

Resposta comentada

Como já discutido na Atividade 3, o campo magnético de um solenóide vem dado por $B = \mu_0 ni$. A densidade de energia magnética é

$$u = \frac{1}{2\mu_0}B^2 = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 i^2 \ . \tag{1.59}$$

Em uma extensão ℓ do solenóide, a energia magnética armazenada será $uA\ell$. A energia magnética por unidade de comprimento é

$$uA = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 A i^2 \ . \tag{1.60}$$

Note que este resultado, conjugado à expressão $U = Li^2/2$ nos dá precisamente a indutância por unidade de comprimento do solenóide, tal como obtida na Atividade 3.

Fim da atividade

Atividade 7

Determine a autoindutância por unidade de comprimento de um cabo coaxial formado por duas cascas cilíndricas condutoras de raios interno R_1 e raio externo R_2.

Resposta comentada

O campo magnético produzido entre as duas cascas cilíndricas pode ser obtido por meio da lei de Ampère. Em coordenadas cilíndricas, tomando o eixo de simetria do cabo coaxial como sendo o eixo z, podemos escrever, para $R_1 < r < R_2$:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\hat{\theta} \ . \tag{1.61}$$

A densidade de energia magnética é, dessa forma,

$$u = \frac{\mu_0 i^2}{8\pi^2 r^2} \ . \tag{1.62}$$

A energia magnética contida em uma seção cilíndrica de altura ℓ é

$$U = \ell \int_{R_1}^{R_2} 2\pi r dr u(r) \ , \tag{1.63}$$

ou seja,

$$U = \frac{\mu_0 i^2 \ell}{4\pi} \ln(\frac{R_2}{R_1}) \ . \tag{1.64}$$

A autoindutância do cabo coaxial por unidade de comprimento é, consequentemente,

$$\frac{L}{\ell} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln(\frac{R_2}{R_1}) \ . \tag{1.65}$$

Fim da atividade

Aplicações tecnológicas

Faremos aqui um apanhado muito breve de alguns exemplos de importância fundamental na vida moderna, todos baseados no fenômeno da indução eletromagnética.

- Geradores

Usinas hidrelétricas e nucleares, geradores eólicos, geradores portatéis, alternadores de automóveis ou até mesmo os pequenos dinâmos que acionam lampadinhas de bicicletas, possuem imãs e bobinas em movimento relativo que produzem força eletromotriz.

- Transformadores

Um transformador de tensão, como aquele com o qual carregamos o telefone celular, ou como os que estão nos postes da rede elétrica, consistem, essencialmente, de duas bobinas. A indutância mútua entre as bobinas permite transformar o valor da fem de entrada em outra (maior ou menor) de saída. O mesmo tipo de configuração é usado nos chamados cicuitos de "casamento de impedância", onde a finalidade é promover a maior transferência de potência entre sistemas elétricos distintos.

- Receptores

Rádios portáteis selecionam as frequências de interesse como uma ressonância de um circuito LC. Mudar de estação corresponde a mudar a capacitância C, mudando a frequência de oscilação $\omega = 1/\sqrt{LC}$.

- Fitas magnéticas, hard disks (HDs), disquetes, cartões magnéticos

As fitas de gravação e os cartões magnéticos funcionam com base no mesmo princípio. O meio material (óxido de ferro, por exemplo) é localmente magnetizado de uma forma específica, contendo a informação registrada. Quando a fita ou o cartão e passado em frente a um "cabeçote" de leitura, isto é, uma bobina, o campo magnético variável induz correntes que então são decodificadas por um circuito analisador.

- Microfones

Alguns microfones consistem em um diafragma que está ligado a um imã circundado por uma bobina. Quando as ondas sonoras atingem o diafragma, o imã vibra induzindo fem variável sobre a bobina. A corrente elétrica assim produzida corresponde ao sinal de aúdio.

- Lâmpadas frias

As assim chamadas "lâmpadas frias" precisam de uma alta tensão inicial para que comecem a operar. Essa tensão é necessária para que o meio gasoso da lâmpada possa se ionizar e conduzir a corrente elétrica. Como produzir alta tensão, se tipicamente temos algumas centenas de volts de entrada? A solução é usar um circuito auxiliar de indutância elevada. Variações abruptas de corrente podem, então, produzir momentaneamente fems de milhares de volts.

- Acionamento/desligamento de sistemas de potência

Não é incomum observar que no momento em que se liga ou se desliga uma furadeira, ou um ar-condicionado, por exemplo, há uma flutuação de tensão em parte da instalação elétrica. Esse tipo de problema deve ser tratado com muito cuidado em instalações industriais, onde as cargas são consideravelmente maiores do que em residências. O fato é que uma instalação elétrica qualquer possui autoindutância! variações de corrente irão, necessariamente, induzir fems no circuito da instalação que podem não ser desprezíveis. Nunca desligue uma usina hidrelétrica abruptamente!

Atividades finais

1. Um fio retilíneo transporta corrente i. Uma espira quadrada de lado a tem um de seus lados paralelos ao fio e se afasta deste com velocidade v. Suponha que a espira possua resistência R e que no instante inicial a distância do lado da espira mais próximo ao fio seja $2a$. Determine o valor da corrente que circula pela espira como uma função do tempo.

2. Uma espira arbitrária atravessa uma região de campo magnético. Mostre que a fem média induzida na espira durante todo o processo de passagem pelo campo magnético é zero.

3. Um fio condutor retilíneo é coplanar a uma espira retangular de lados a e b. Determine a indutância mútua entre o fio e a espira, supondo que os lados de comprimento a da espira sejam paralelos ao fio. Suponha também que a distância do lado mais próximo da espira ao fio seja d.

4. Considere duas espiras condutoras por onde passam correntes i_1 e i_2. Sejam L_1, L_2 e $M = M_{12} = M_{21}$ os coeficientes de indutância do sistema. Mostre que a energia magnética é dada por

$$U = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \ . \tag{1.66}$$

Respostas comentadas

1. O campo magnético produzido pelo fio atravessa perpendicularmente a área da espira quadrada. À distância r do fio, o campo vale

$$B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \ . \tag{1.67}$$

Seja $d = 2a + vt$ a distância do lado mais próximo da espira ao fio. O fluxo magnético sobre a espira será

$$\Phi_B = a\int_d^{d+a} dr \frac{\mu_0 i}{2\pi r} = \frac{\mu_0 a i}{2\pi}\ln\left(\frac{d+a}{d}\right) \ . \tag{1.68}$$

A fem induzida sobre a espira é, portanto, em valor absoluto,

$$\mathcal{E} = \left|\frac{d\Phi_B}{dt}\right| = \frac{\mu_0 a v i}{2\pi}\left(\frac{1}{2a+vt} - \frac{1}{3a+vt}\right) \ . \tag{1.69}$$

2. A fem induzida sobre a espira é

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \ . \tag{1.70}$$

a fem média induzida pela espira durante todo o processo de passagem pelo campo magnético é, por definição,

$$\bar{\mathcal{E}} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T dt\mathcal{E}(t) = -\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T dt\frac{d\Phi_B}{dt} \ , \tag{1.71}$$

isto é,

$$\bar{\mathcal{E}} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}[\Phi_B(T) - \Phi_B(0)] = 0 \ . \qquad (1.72)$$

3. De maneira semelhante à solução da primeira atividade, calculamos o fluxo magnético sobre a espira, imaginando que o fio conduza corrente i. Temos:

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 a i}{2\pi} \ln(\frac{d+b}{d}) \ . \qquad (1.73)$$

A indutância mútua é, assim,

$$M = \frac{\Phi_B}{i} = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln(\frac{d+b}{d}) \ . \qquad (1.74)$$

4. Estudemos o trabalho W_1 que é necessário realizar contra as forças de indução na primeira espira. A fem induzida nesta espira é

$$\mathcal{E}_1 = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \ . \qquad (1.75)$$

Obtemos

$$\begin{aligned} W_1 &= -\int_0^\infty dt \mathcal{E}_1 i_1 = \int_0^\infty dt (L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}) i_1 \\ &= \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M \int_0^\infty dt i_1 \frac{di_2}{dt} \ . \qquad (1.76) \end{aligned}$$

Analogamente, temos

$$W_2 = \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M \int_0^\infty dt \frac{di_1}{dt} i_2 \ . \qquad (1.77)$$

Dessa forma, a energia magnética total armazenada no sistema será

$$\begin{aligned} U &= W_1 + W_2 = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M \int_0^\infty dt \frac{d(i_1 i_2)}{dt} \\ &= \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \ . \qquad (1.78) \end{aligned}$$

Resumo

Campos magnéticos variáveis induzem campo elétricos. Este é o fenômeno da indução eletromagnética, sintetizado matematicamente pela lei de Faraday, Eq. (1.1). Os campos elétricos induzidos podem produzir correntes em espiras, fazendo com que o fenômeno de indução seja verificado experimentalmente de maneira razoavelmente simples. A força eletromotriz induzida em um sistema de condutores depende dos coeficientes de autoindutância e indutância mútua do sistema. A existência de força eletromotriz induzida está associada ao fato de que campos magnéticos armazenam energia – energia equivalente ao trabalho que é necessário realizar contra as forças de indução, para que uma determinada configuração de correntes seja estabelecida. O fenômeno da indução eletromagnética possui importância fundamental na tecnologia moderna.