As Equações de Maxwell

Metas

- escrever as Equações de Maxwell no vácuo em sua forma final ;
- escrever as Equações de Maxwell em um meio material ;
- escrever as condições de contorno em interfaces.

Objetivos

Depois de estudar esta aula, você deverá ser capaz de

- calcular a corrente de deslocamento em situações simples;
- aplicar as condições de contorno .

As Equações de Maxwell

Até agora seguimos um longo caminho, analisando pouco a pouco, o campo elétrico e magnético. Sabemos que para termos uma descrição matemática consistente de um campo vetorial, precisamos conhecer a sua divergência e seu rotacional, complementadas, possivelmente, por condições de contorno. Um exemplo de condição de contorno muito útil, que você deve ter em mente em geral, é que consideramos distribuições de cargas e correntes localizadas no espaço, e que os campos elétrico e magnético caem a zero rapidamente no inifinito, pelo menos com o quadrado da distância. Esse tipo de condição "no infinito" é muito útil, mas temos que tomar cuidado, pois nem sempre é válida, como no caso de uma linha de carga infinita.

Além das equações diferenciais que governam a dinâmica dos campos, devemos saber também qual é a lei de força entre o campo eletromagnético e a matéria. Esta lei de força é dada pela força de Lorentz

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \tag{12.1}$$

Além das equações que governam os campos e da lei de força entre campo e matéria, temos uma lei de conservação importante, que é a lei da conservação da carga

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{12.2}$$

onde $\vec{J}$ é a densidade de corrente e ρ é a densidade de carga.

Na Aula 11 estudamos a lei de Faraday, que introduziu fenômenos dependentes do tempo em nosso estudo do eletromagnetismo. Ela estabelece uma relação entre a circulação do campo elétrico e a variação do fluxo do campo magnético

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{S}} \vec{B} \cdot \hat{n} dA \tag{12.3}$$

Façamos um apanhado das equações que temos até agora, para o campo elétrico e campo mágnético. Para o campo elétrico temos a lei de Gauss e a lei de Faraday

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \text{e} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \tag{12.4}$$

Para o campo magnético, temos o análogo da lei de Gauss (mas que não tem nome algum associado...) e a lei de Ampère

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad \text{e} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \tag{12.5}$$

A pergunta que devemos nos fazer agora é, será que estas equações são bem definidas matematicamente? Será que o eletromagnetismo é descrito por este conjunto de quatro equações apenas? Nesta maneira que estamos formulando o eletromagnetismo não está claro se as leis da física que queremos que elas descrevam estão, de fato, descritas de maneira consistente. Na verdade veremos agora que, nesta forma, elas não são consistentes com a lei da conservação da carga.

Para isso, consideremos a lei de Ampère. Como o lado esquerdo é um rotacional, sabemos que a sua divergência é nula, ou seja

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0. \tag{12.6}$$

Mas, então, temos

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0 = \vec{\nabla} \cdot (\mu_0 \vec{J}) = -\mu_0 \frac{\partial \rho}{\partial t}, \tag{12.7}$$

onde usamos a lei da conservação da carga na última passagem. Isso mostra que a nossa descrição do eletromagnetismo é, no máximo, uma descirção de fenômenos estáticos, que não dependem do tempo.

Como devemos corrigir as equações de Maxwell para que elas: 1) sejam matematicamente consistentes entre si e com a lei da conservação da carga, e 2) se reduzam às equações que explicam tão bem os fenômenos estáticos?

A solução deste problema foi dada por Maxwell. Vale a pena mencionar aqui um certo problema hitórico. Frequentemente se diz que "Maxwell consertou as equações do eletromagnetismo por razões puramente estéticas", mas isso não é bem verdade. Em primeiro lugar, porque a forma simplificada que usamos para escrever as equações do eletromagnetismo de deve a Oliver Heaviside, e não a Maxwell. Além disso, Maxwell introduziu a chamada corrente de deslocamento, que tornas as equações, de fato, mais simétricas (e portanto mais elegantes) por outras razões. O fato de esta corrente ter tornado as equações não apenas mais elegantes, mas também bem definidas matematicamente, foi vist por Maxwell como um "bônus". Em todo o caso, o mérito de modificar as equações é de Maxwell. Seguiremos, porém, uma rota diferente da argumentação histórica, mas que tem vantagem de ser mais clara para os nossos fins.

Em primeiro lugar, será que ao considerarmos fenômenos dependentes do tempo, as leis de Gauss e da divergência do campo magnético devem mudar? Podemos argumentar que não, da seguinte maneira. A divergência mede o fluxo local, que é, essencialmente uma espécie de contagem do número de linhas de força que nascem de uma carga. Considere uma carga dentro de um certo volume. O fluxo do campo elétrico pela superfície que contem este volume é proporcional à quantidade de carga no interior dela, que por sua vez é proporcional ao "número de linhas de força" que atravessa esta superfície. Se movermos esta carga, mas mantendo ela dentro desta superfície, o número de linhas que atravessa a superfície não deve mudar. Assim, a lei de Gauss deve se manter válida, e já está em sua forma final. O mesmo argumento vale para a lei da divergência do campo magnético.

Estudemos agora o que a lei de Gauss e a conservação da carga elétrica implicam. Calculando a derivada com relação ao tempo da lei de Gauss, temos

$$\frac{\partial \vec{\nabla}\cdot\vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon_0}\vec{\nabla}\cdot\vec{J} \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon_0}\vec{J}\right) = 0, \tag{12.8}$$

onde usamos a lei da conservação da carga na passagem da segunda igualdade. Como temos um campo vetorial cuja divergência é nula, sabemos que este campo deve ser um rotacional de um campo vetorial $\vec{V}$, ou seja

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon_0}\vec{J} = \vec{\nabla} \times \vec{V} \tag{12.9}$$

Para tornar a Equação (12.9) mais interessante, podemos multiplicá-la por $\mu_0\epsilon_0$, ficando

$$\mu_0\epsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0\vec{J} = \vec{\nabla} \times \mu_0\epsilon_0\vec{V}. \tag{12.10}$$

Essa equação parece muito com a lei de Faraday. Podemos ver, na verdade, que ela se reduz a uma "lei de Faraday" para este campo $\mu_0\epsilon_0\vec{V}$ no limite estático:

$$\text{se } \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \times \mu_0\epsilon_0\vec{V} = \mu_0\vec{J} \tag{12.11}$$

Esta equação parece muito com a lei de Ampère estática, identificando $\mu_0\epsilon_0\vec{V}$ com $\vec{B}$. Se levarmos esta identificação às últimas conseqüências, teremos que mudar a lei de Ampère, portanto, da seguinte forma

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \tag{12.12}$$

ou seja, teremos que adicionar um termo ao lado direito da lei de Ampère, que era o lado que continha apenas a corrente. Assim, esse termo tem um papel de corrente, e por isso é chamado de *corrente de deslocamento*. Você pode ver agora, "por construção", que a divergência, tanto do lado esquerdo quanto do lado direito, se anulam.

Há uma maneira física de percebermos a necessidade de se consertar a lei de Ampère. Considere o circuito da Figura (12.1), formado por uma bateria e um capacitor. Considere o circuito $\mathcal{C}$ e a superfície $\mathcal{S}$, como mostra a

Fig. 12.1: Circuito que ilustra o argumento para a corrente de deslocamento.

figura. Podemos calcular a circulação do campo magnético por este circuito, que será relacionado à corrente que atravessa a superfície $\mathcal{S}$. Neste ponto não há nada obviamente errado com a lei de Ampère sem a corrente de deslocamento. O problema, porém, é que exite um número infinito de superfícies que tem o mesmo circuito $\mathcal{C}$ como borda, em particular a superfície $\mathcal{S}'$, como

Fig. 12.2: Outra superfície a mesma borda $\mathcal{C}$.

mostra a Figura (12.2) E agora? Neste caso *não há corrente atravessando a superfície* $\mathcal{S}'$! A corrente de deslocamento que introduzimos conserta este problema, como veremos na próxima atividade

Atividade 1

Considere o circuito da Figura (12.1). Suponha que o capacitor tem placas paralelas de área A_0, separadas por uma distância d, e que a corrente que flui pelo circuito é constante e igual a I. Mostre que o fluxo do rotacional é o mesmo em $\mathcal{S}$ e em $\mathcal{S}$' (este fluxo é igual à circulação de $\vec{B}$ por $\mathcal{C}$).

Solução:

Calculemos o fluxo de $\vec{\nabla}\times\vec{B}$ por $\mathcal{S}$. como o campo elétrico neste trecho não varia com o tempo (é constante, e faz com que haja corrente, apenas), temos

$$\int_{\mathcal{S}} \vec{\nabla}\times\vec{B}\cdot\hat{n}dA = \mu_0 I \tag{12.13}$$

E pela superfície $\mathcal{S}$'? Esta superfície não é atravessada por corrente elétrica, então toda contribuição vem da corrente de deslocamento, que devemos calcular. Para isso, primeiro, calculemos o campo elétrico no interior do capacitor como uma função do tempo. Se a carga das placas for $\pm Q$, então sabemos que

$$\vec{E} = \frac{Q}{A_0\epsilon_0}\hat{u} \tag{12.14}$$

onde $\hat{u}$ é o versor que vai da placa positiva para a placa negativa. Quanto vale a carga Q como função do tempo? Se a corrente é I, constante, então, supondo que em $t = 0$ o capacitor está descarregado, o acúmulo de carga será dado por

$$Q(t) = It. \tag{12.15}$$

Usando a Equação (12.14), temos

$$\vec{E} = \frac{It}{A_0\epsilon_0}\hat{u} \tag{12.16}$$

A corrente de deslocamento é dada, então, por

$$\vec{J}_d = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \mu_0\frac{I}{A_0}\hat{u}. \tag{12.17}$$

O fluxo desta corrente por $\mathcal{S}$' é

$$\int_{\mathcal{S}}' \vec{J}_d \cdot \hat{n} dA = \int_{\mathcal{S}}' \mu_0 \frac{I}{A_0} \hat{u} \cdot \hat{n} dA = \mu_0 I \tag{12.18}$$

O mesmo resultado! (como deveria ser...).

Fim da atividade

Há uma observação importante a ser feita aqui: a corrente de deslocamento gera campos magnéticos, exatamente da mesma maneira que uma corrente elétrica gera campos magnéticos. Antes consdierávamos que as fontes de campos magnéticos eram apenas as correntes elétricas, mas com a introdução da corrente de deslocamento, vemos que há uma outra maneira de gerar um campo magnético, que é por meio de um campo elétrico variável no tempo. Aplicaremos esta idéia na próxima atividade.

Atividade 2

Calcule o campo magnético gerado pela corrente de deslocamento do problema descrito na atividade anterior.

Solução:A corrente de deslocamento é

$$\vec{J}_d = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \frac{I}{A_0} \hat{u}. \tag{12.19}$$

Podemos usar a lei de Ampère e as simetrias do problema para calcular $\vec{B}$. Por simetria, veja a Aula 9, se necessário, temos que $\vec{B} = B(s)\hat{\phi}$. Aplicando a lei de Ampère, em sua forma integral, a um circuito circular, de raio R, com centro no eixo de simetria do capacitor, e paralelo às placas, temos

$$B(R) 2\pi R = \mu_0 \frac{I}{A_0} \pi R^2 \Rightarrow B(R) = \mu_0 \frac{I}{2A_0} R. \tag{12.20}$$

O campo magnético, é dado, portanto, por

$$\vec{B} = \mu_0 \frac{I}{2A_0} s \hat{\phi} \tag{12.21}$$

Fim da atividade

Agora que vimos um exemplo prático de como a corrente de deslocamento conserta a lei de Ampère, analisemos as suas conseqüências com um pouco mais de cuidado.

A primeira observação a fazer é que agora há um paralelo entre o campo elétrico e o campo magnético bastante forte. A lei de Faraday nos diz que um campo magnético que varia no tempo cria um campo elétrico. Antes pensavamos que correntes elétricas produziam campos magnéticos, mas agora sabemos que campos elétricos que variam no tempo também são capazes de criar um campo magnético. Assim, as fontes de campo elétrico passam a ser cargas elétricas e campos magnéticos que variam no tempo, e as fontes de campo magnético passam a ser correntes elétricas e campos elétricos que variam no tempo.

Podemos, finalmente, juntar as quatro equações para o campo elétrico e magnético, com a introdução da corrente de deslocamento:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} & \text{lei de Gauss;} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{lei de Faraday;} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & \text{lei sem nome...;} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & \text{lei de Ampère.} \end{cases}$$

Vale a pena você olhar estas equações com um pouco mais de cuidado, até mesmo admirá-las. São essas quatro equações, fruto do trabalho de físicos teóricos e experimentais através de séculos de pesquisa, que explicam todos, absolutamente todos, fenômenos eletromagnéticos clássicos. Todas as aplicações que vemos, os aparelhos elétricos, desde um liquidificador até um computador de última geração, a um celular, são verificações contínuas da validade das equações de Maxwell. Não é um exagero dizer que este é um dos grandes triunfos científicos de todos os tempos.

Por um lado, estas equações marcam o fim de uma fase de estudo do eletromagnetismo, agora temos a chave para entender todos os fenômenos eletromagnéticos, e o resto, pode-se dizer, é “mera” conseqüência destas quatro equações. Por outro lado, também marca o começo das aplicações do eletromagnetismo, acompanhado de um universo rico de idéias. A primeira grande supresa virá na próxima aula, na qual veremos (tirando um pouco da surpresa...) que existem soluções de onda para os campos eletromagnéticos, e que estas ondas não são nada mais nada menos do que a própria luz. Esta unificação dos fenômenos elétricos, magnéticos e ópticos é um dos grandes momentos da história da física. Veremos também que a teoria da relatividade é, de certa forma, um estudo das simetrias reveladas pelo eletromagnetismo. Era impossível saber que tanta coisa maravilhosa sairia destas quatro simples equações.

O restante deste curso será o estudo de algumas destas conseqüências, especialmente em óptica e relatividade. Antes de podermos partir para estas aplicações precisamos fazer duas coisas, generalizar as equações de Maxwell para meios materiais lineares e estudar as condições de contorno para os campos elétrico e magnético em interfaces.

Eletromagnetismo na matéria

Como vimos nas Aulas 6 e 9, ao considerarmos os campos elétrico e magnético em meios materiais, é bastante útil separar as cargas e correntes em uma parte livre e uma ligada. Cargas e correntes livres são aquelas que se movem livremente pelo material, como fica claro pelo nome. As cargas e correntes ligadas são a parte conectada ao próprio meio. Antes de prosseguir nesta seção, pode ser uma boa idéia você revisar aquelas aulas antes.

Aqui consideraremos apenas meios (dielétricos e magnéticos) lineares. Para os meios dielétricos sabemos que a polarização, que é a densidade de dipólos elétricos no meio, está relacionada à carga elétrica ligada volumétrica $(\vec{r}\hbar o_b)$ e superficial (σ_b),

$$\rho_b = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P} \qquad \text{e} \qquad \sigma_b = \vec{P}\cdot\hat{n}. \tag{12.22}$$

Agora estamos interessados em situações nas quais as cargas se movem. Será que essas cargas ligadas criam "correntes de polarização" $\vec{J}_p$? Considere um pequeno cilindro, como fizemos na Aula 6, de comprimento ΔL e seção reta de área ΔA, como mostra a Figura (12.3). Sabemos que a corrente que passa

Fig. 12.3: Pequeno cilindro para o cálculo da corrente de polarização.

por um elemento de área a variação da carga que passou por aquele elemento. Se considerarmos que em t a carga é dada por $Q(t) = \vec{P}(t)\cdot\hat{n}\Delta A$, então entre t e $t+\Delta t$ a variação da carga é dada por

$$Q(t+\Delta t)-Q(t) = \vec{P}(t+\Delta t)\cdot\hat{n}\Delta A - \vec{P}(t)\cdot\hat{n}\Delta A = \frac{\partial\vec{P}}{\partial t}\cdot\hat{n}\Delta A\Delta t = \vec{J}_p\cdot\hat{n}\Delta A\Delta t, \tag{12.23}$$

e concluímos que há uma corrente de polarização dada por

$$\vec{J}_p = \frac{\partial\vec{P}}{\partial t}. \tag{12.24}$$

Em um meio magnético sabemos que, como vimos na Aula 10, surge uma corrente de magnetização dada por

$$\vec{J}_m = \vec{\nabla} \times \vec{M}. \tag{12.25}$$

A corrente total $\vec{J}$ pode, então, ser decomposta em três partes, uma parte livre, gerada pelas cargas que sem movem no meio, uma parte da polarização, gerada pelo movimento dos dipólos elétricos que formam o meio material, e uma parte de magnetização, gerada pelos dipólos magnéticos, ou seja

$$\vec{J} = \vec{J}_f + \vec{J}_p + \vec{J}_m = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{M}. \tag{12.26}$$

Para posseguirmos devemos saber algo mais sobre o meio, o que depende de uma teoria microscópica, estabelecendo uma relação entre a polarização e magnetização e os campos elétrico e magnético. Aqui entra a nossa hipótese de um meio linear, como fizemos nas Aulas 6 e 10, ou seja, as relações que queremos são

$$\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E} \qquad \text{e} \qquad \vec{M} = \frac{\chi_m}{1+\chi_m}\frac{1}{\mu_0}\vec{B}. \tag{12.27}$$

Esta última expressão pode parecer um pouco estranha, mas se você conferir na Aula 10, verá que ela é escrita assim porque o costume é se escrever a relação mais simples entre $\vec{M}$ e $\vec{H}$, e não $\vec{M}$ e $\vec{B}$. Podemos usar estas expressões e a decomposição da corrente total para escrever as equações de Maxwell em um meio material. Analisemos uma por uma.

1. Lei de Gauss. Neste caso, temos

$$\begin{aligned} &\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0}(\rho_f + \rho_b) = \frac{1}{\epsilon_0}(\rho_f - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}) \Rightarrow \\ &\vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_f \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f \end{aligned} \tag{12.28}$$

   onde $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, exatamente como no caso estático. Note que em um meio linear $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, com $\epsilon = \epsilon_0(1+\chi_e)$.

2. Lei sem nome. Para a divergência de $\vec{B}$, temos

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \tag{12.29}$$

   e nada muda.

3. Lei de Faraday. Mais uma vez, como

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \tag{12.30}$$

   mais uma vez não é necessário fazer qualquer mudança.

4. Lei de Ampère. Aqui temos que tomar um pouco mais de cuidado. Partindo da lei de Ampère com a decomposição da corrente que escrevemos em 12.26, temos,

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\times\vec{B} &= \mu_0\vec{J}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\\ &= \mu_0(\vec{J}_f+\vec{J}_e+\vec{J}_m)+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\\ &= \mu_0\vec{J}_f+\mu_0\vec{\nabla}\times\vec{M}+\mu_0\left(\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}+\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)\\ &= \mu_0\vec{J}_f+\mu_0\vec{\nabla}\times\vec{M}+\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\epsilon_0\vec{E}+\vec{P}\right)\\ &= \mu_0\vec{J}_f+\mu_0\vec{\nabla}\times\vec{M}+\mu_0\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \qquad (12.31)\end{aligned}$$

Usando que

$$\vec{H}=\frac{1}{\mu_0}\vec{B}-\vec{M} \qquad (12.32)$$

temos

$$\vec{\nabla}\times\left(\frac{1}{\mu_0}\vec{B}-\vec{M}\right)=\vec{J}_f+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\Rightarrow\vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{J}_f+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}. \qquad (12.33)$$

A Equação (12.33) é válida para um meio material qualquer. Em um meio linear, temos $\vec{D}=\epsilon\vec{E}$ e $\vec{B}=\mu\vec{H}$.

Vale a pena escrevermos as quatro equações de Maxwell em um meio material

$$\begin{cases}\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho_f & \text{lei de Gauss;}\\ \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} & \text{lei de Faraday;}\\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 & \text{lei sem nome...;}\\ \vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{J}_f+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} & \text{lei de Ampère.}\end{cases}$$

Estas são as Equações de Maxwell em um meio material, fundamentais para entendermos um sem número de aplicações. Da forma que estão escritas, elas valem em um meio arbitrário, mas neste curso nos concentraremos em meios lineares, nos quais $\vec{B}=\mu\vec{H}$ e $\vec{D}=\epsilon\vec{E}$. Para estudarmos alguns destes fenômenos é importante que saibamos como os campos eletromagnéticos se comportam nas interfaces de meios materiais. Este é o assunto de nossa próxima seção.

Condições de contorno em interfaces

Um problema típico com o qual nos deparamos no eletromagnetismo é o tratamento de campos eletromagnético em interfaces. Por exemplo, como veremos na próxima aula, a luz é formada por ondas eletromagnéticas, e a reflexão e refração da luz são efeitos ópticos que ocorrem quando há uma transição de uma onda de um meio material para o outro.

Para este tipo de aplicação, precisamos saber as condições de contorno para os campos eletromagnéticos em interfaces, como foi feito para o campo elétrico na Aula 6 e para o campo magnético na Aula 9.

Consideremos, assim, uma interface de dois meios. Vejamos qual a conseqüência das Equações de Maxwell. Primeiro, da lei de Gauss. Como a lei de Gauss é exatamente a mesma que no caso estático, concluímos, de forma totalmente análoga à Aula 6, que

$$(\vec{D}_1)_\perp - (\vec{D}_2)_\perp = \sigma_f, \tag{12.34}$$

ou seja, as componentes do vetor deslocamento, perpendiculares à interface, sofrem uma descontinuidade igual à densidade de carga livre superficial.

Prosseguindo, podemos considerar a lei sem nome, $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$. Mais uma vez, o caso é o mesmo que estudamos na Aula 9 e concluímos que

$$(\vec{B}_1)_\perp - (\vec{B}_2)_\perp = 0 \tag{12.35}$$

Para a lei de Faraday devemos introduzir um pequno circuito retangular, de lados ΔL_1 e ΔL_2, perpendicular à superfície, como mostra a Figura (12.4) Faremos $\Delta L_2 \to 0$ antes de ΔL_1, como foi feito na Aula 9. Calculando

Fig. 12.4: Circuito para a condição de contorno deduzida a partir da lei de Faraday.

o fluxo do rotacional de $\vec{E}$ pela superfície do retângulo, e aplicando o teorema de Stokes e a lei de Faraday, temos, no limite $\Delta L_2 \to 0$,

$$((\vec{E}_1)_\parallel - (\vec{E}_2)_\parallel)\Delta L_1 = -\frac{\partial \vec{B} \cdot \hat{n}}{\partial t}\Delta L_1 \Delta L_2 \tag{12.36}$$

O lado direito da Equação (12.36) é a variação no tempo do fluxo do campo magnético pela superfície do retângulo. No limite $\Delta L_2 \to 0$, o lado direito se anula, e ficamos com

$$(\vec{E}_1)_\parallel - (\vec{E}_2)_\parallel = 0. \tag{12.37}$$

Mais uma vez, a mesma equação de antes.

Finalmente, analisemos a conseqüência da lei de Ampère. Usando o mesmo circuito da Figura (12.4), calculamos o fluxo do rotacional de $\vec{H}$ pela superfície do retângulo, e fazemos $\Delta L_2 \to 0$ antes de ΔL_1. A escolha do circuito deve ser tal que a corrente superficial flua perpendicularmente à superfície do retângulo. No caso de haver corrente superficial, a corrente que atravessa esse circuito é dada por $K\Delta L_1$. Assim, temos

$$((\vec{H}_1)_\parallel - (\vec{H}_2)_\parallel)\Delta L_1 = K\Delta L_1 + \frac{\partial \vec{D}\cdot\hat{n}}{\partial t}\Delta L_1 \Delta L_2 \tag{12.38}$$

No limite $\Delta L_2 \to 0$, obtemos

$$(\vec{H}_1)_\parallel - (\vec{H}_2)_\parallel = K \tag{12.39}$$

Podemos reunir as quatro condições de contorno, que serão úteis na Aula 14, de reflexão e refração:

$$\begin{cases} (\vec{D}_1)_\perp - (\vec{D}_2)_\perp = \sigma_f; \\ (\vec{E}_1)_\parallel - (\vec{E}_2)_\parallel = 0; \\ (\vec{B}_1)_\perp - (\vec{B}_2)_\perp = 0; \\ (\vec{H}_1)_\parallel - (\vec{H}_2)_\parallel = K. \end{cases}$$

Estas são as equações que os campos elétrico e magnético devem satisfazer em uma interface de um meio material. Como neste curso consideraremos apenas meios lineares, vale a pena escrever as condições para este caso específico. Lembrando que $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$ e $\vec{B} = \mu\vec{H}$, temos

$$\begin{cases} (\epsilon_1\vec{E})_\perp - (\epsilon_2\vec{E})_\perp = \sigma_f; \\ (\vec{E}_1)_\parallel - (\vec{E}_2)_\parallel = 0; \\ (\vec{B}_1)_\perp - (\vec{B}_2)_\perp = 0; \\ (\frac{1}{\mu_1}\vec{B}_1)_\parallel - (\frac{1}{\mu_2}\vec{B}_2)_\parallel = K. \end{cases}$$

Uma outra simplificação que será útil, é considerar meios isolantes, nos quais não há carga ou corrente livres. Neste caso temos as equações anteriores com $\sigma_f = 0$ e $K = 0$.

Resumo

As equações para os campos elétrico e magnético, lei de Gauss, lei de Faraday, lei da divergência de $\vec{B}$ e lei de Ampère, da forma construída até a Aula 11 explicam um grande número de fenômenos, mas não são compatíveis com a lei da conservação da carga por exemplo. A divergência da lei de Ampère mostra que há algo faltando. A introdução de um termo na lei de Ampère, a chamada corrente de deslocamento, conserta este problema e torna as equações de Maxwell mais simétricas.

Uma vez de posse das equações de Maxwell completas, é importante encontrar as condições de contorno nas interfaces entre meios, para "emendar" as soluções de cada lado. Estas condições são cruciais para as aplicações em óptica.

Exercícios

1. Sabemos que um condutor perfeito é uma material no qual o campo elétrico se anula em seu interior. Usando as equações de Maxwell, responda aos itens a seguir.

   (a) Mostre que o campo magnético no interior de um condutor perfeito é constante.

   (b) Mostre que o fluxo magnético por um circuito em um condutor perfeito é constante.

   (c) Considere agora um outro tipo de material, que além de anular o campo magnético, anula o campo magnético em seu interior. Esses materiais existem e são chamados de *supercondutores*. Mostre que, em um supercondutor, a corrente elétrica está confinada à superfície do material.

2. Até agora estamos supondo que não existem cargas magnéticas, o que está de acordo com todas as evidências experimentais. Mas considere por um momento que existem cargas magnéticas, os chamados *monopólos magnéticos*, e portanto correntes magnéticas, com densidades ρ_m e $\vec{J}_m$, respectivamente.

   (a) Qual é a lei de conservação da carga magnética?

(b) Como as Equações de Maxwell devem ser modificadas para podermos acomodar a existência de monopólos magnéticos?

3. Em um condutor real, não perfeito, mas muito bom, pode-se escrever uma relação fenomenológica entre a corrente e o campo elétrico em um ponto qualquer do material, da seguinte forma

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \tag{12.40}$$

onde σ é uma constante que depende do material, chamada de condutividade. Em geral se usa a resistividade de um material, que é $\rho = 1/\sigma$ (não confunda este ρ com densidade de carga!). A unidade de ρ é Ohm-metros. Usando esta experessão entre $\vec{J}$ e $\vec{E}$, a lei da conservação da carga e as Equações de Maxwell, mostre que a densidade de carga em um ponto do condutor tem a seguinte forma

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, 0) \exp(-\sigma t/\epsilon_0) \tag{12.41}$$

Esta expressão mostra que, para σ/ϵ_0 muito grande, o tempo para que a densidade de carga no interior do condutor seja desprezível é extremamente curto. Por exemplo, para a prata $\sigma \approx 6,2 \times 10^7$.

4. Suponha que você tem dois tubos, um de metal e um de material isolante, e um imã. Coloque os dois tubos verticalmente e deixe o imã cair por cada um deles. Será que o tempo de queda nos dois casos é o mesmo?

Soluções

1. Usando a lei de Faraday, temos

(a) Como $\vec{E} = 0$ no condutor perfeito, temos

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow 0 = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{B} = \text{constante}. \tag{12.42}$$

Note que $\vec{B}$ é constante, mas pode depender da posição, pois é uma constante no tempo, apenas.

(b) Pela lei de Faraday na forma integral, temos que o fluxo do campo magnético e a circulação do campo elétrico estão ligadas por

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} \cdot \hat{n} dA = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \tag{12.43}$$

Como $\vec{E} = 0$, o fluxo é constante.

2. (a) Teremos uma lei semelhante à lei de conservação de carga elétrica

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_m + \frac{\partial \rho_m}{\partial t} = 0 \tag{12.44}$$

   (b) A "lei sem nome" muda para

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \mu_0 \rho_m \tag{12.45}$$

   e a lei de Faraday para

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \mu_0 \vec{J}_m \tag{12.46}$$

   Para entender o sinal menos nesta equação, note que, como $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$, temos

$$\vec{\nabla} \cdot \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \mu_0 \vec{J}_m \right) = -\mu_0 \left(\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_m \right) = 0 \tag{12.47}$$

   pela lei de conservação de carga magnética.

3. Na situação em que o imã cai pelo tubo condutor, pela lei de Faraday se criam correntes no tubo, que geram um campo magnético que opõe o movimento do imã (lei de Lenz). No caso em que o tubo é feito de material isolante, não há o surgimento de correntes. Portanto o imã demora mais a cair pelo tubo de material condutor do que pelo tubo de material isolante.