Ondas Eletromagnéticas

Metas

- deduzir a existência de fenômenos ondulatórios no eletromagnetismo;
- estudar soluções ondulatórias das equações de Maxwell;
- utilizar o formalismo de campos complexos para representar estados de polarização.

Objetivos

Ao terminar esta aula você deverá ser capaz de:

- definir configurações de ondas eletromagnéticas planas;
- determinar o estado de polarização de uma onda plana arbitrária;
- discutir efeitos polarização e condutividade na propagação de radiação.

Introdução

Nas aulas precedentes discutimos várias manifestações importantes de fenômenos eletromagnéticos e o papel destes como pilares da formulação extremamente sintética e profunda dada pelas equações de Maxwell. Graças às equações de Maxwell somos capazes de descrever, detalhadamente, a maneira segundo a qual cargas e correntes elétricas produzem campos eletromagnéticos (que por sua vez irão atuar sobre estas mesmas cargas e correntes).

Uma grande surpresa teórica proporcionada pelas equações de Maxwell foi a predição, devida ao próprio Maxwell, em 1864, de que perturbações eletromagnéticas propagam-se como *ondas* com velocidade bem definida no vácuo. Em outras palavras, os campos elétricos e magnéticos produzidos por alterações de uma configuração qualquer de cargas não serão estabelecidos instântaneamente no espaço. Não há ação à distância no eletromagnetismo!

A expressão da velocidade de propagação das ondas eletromagnéticas no vácuo é, como veremos mais adiante,

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \ , \tag{1.1}$$

onde ϵ_0 e μ_0 são, respectivamente, as nossas familiares constante dielétrica e a constante de permissividade magnética. O valor numérico de c é

$$c \simeq 3 \times 10^5 \quad km/s \ , \tag{1.2}$$

fato que chamou a atenção de Maxwell, pela sua estreita proximidade com o valor numérico da velocidade da luz, tal como determinada experimentalmente por Roemer (1676), Bradley (1729) e Fizeau (1849). Maxwell, então, propõe que a luz é radiação eletromagnética. Nas palavras de Maxwell,

Essa velocidade é tão próxima à velocidade da luz que nos dá fortes razões para concluir que a própria luz (incluindo radiação de calor e outras radiações) é uma perturbação eletromagnética na forma de ondas que se propagam de acordo com as leis eletromagnéticas.

A conjectura de que a ótica reduz-se ao eletromagnetismo, motivada por discussões essencialmente teóricas, foi uma das hipóteses mais fecundas da história da física, como as décadas posteriores iriam provar. A comprovação experimental da existência de ondas eletromagnéticas e de suas propriedades essenciais foi estabelecida por Hertz em uma série de trabalhos iniciados em 1886 e relatados no Congresso Alemão para o Progresso da Ciência de 1888. O ponto de partida das investigações de Hertz foi a observação casual, em uma demonstração para alunos, de que ao se fazer passar corrente elétrica em uma bobina, provocando faíscas, surgiam faíscas inesperadas em outra bobina, desconectada da primeira. Hertz percebeu que este tipo de fenômeno abria o caminho para a validação do cenário proposto por Maxwell a respeito da propagação de influências eletromagnéticas no espaço. Em homenagem a Hertz, as ondas eletromagnéticas são chamadas muitas vezes de “ondas hertzianas”.

Fenômenos ondulatórios

O ponto central desta aula é o de que perturbações eletromagnéticas propagam-se no espaço como ondas. O que, precisamente, são ondas? Vamos revisar, portanto, como um estágio preparatório, as idéias gerais associadas aos fenômenos ondulatórios.

O exemplo mais simples de propagação ondulatória que a natureza nos oferece, sem que façamos qualquer esforço apreciável (a não ser o de querer observar!), são as ondas marítimas produzidas, em geral, pela ação dos ventos sobre o oceano. O perfil de uma onda de mar lembra muito o perfil de uma onda gerada em uma corda esticada, como mostrado na Fig.1.

Figura 1.1: Perfil de uma onda de mar ou de uma onda produzida em uma corda esticada.

A coordenada ψ mostrada na Fig.1 denota a altura da perturbação (nível local da superfície do mar ou altura da corda) em relação à situação de repouso, descrita por $\psi = 0$. A coordenada x indica a direção de propagação da onda. Tanto ondas de mar como ondas em uma corda são exemplos de *ondas transversais*: o meio material (água ou a corda) oscila em uma direção perpendicular à direção de propagação (um pedaço de madeira que flutua no mar oscila para cima e para baixo). Entretanto, nem todas as ondas são transversais. Ondas sonoras, por exemplo, são *longitudinais*. Isso significa que o meio material (por exemplo, o ar) vibra ao longo da direção de propagação, provocando a formação sucessiva de regiões densas e rarefeitas de meio material. Uma onda longitudinal também pode ser representada por um perfil semelhante ao da Fig.1 No caso de ondas sonoras, ψ poderia representar a densidade ou a pressão do meio material.

A hipótese de que ondas propagam-se em meios materiais é extremamente útil como uma ferramenta heurística para se formular matematicamente as equações essenciais dos fenômenos ondulatórios. Entretanto, devemos ter em mente que a propagação de ondas não implica a existência de um meio material de suporte. Parece um pouco estranho? De fato é. Os físicos do século XIX, incluindo o próprio Maxwell, associavam necessariamente ondas a meios materiais. Acreditou-se, durante décadas, que ondas eletromagnéticas corresponderiam a vibrações de um meio material misterioso, chamado de “éter”(que nada teria a ver com o éter usado pelos médicos!). Diversas investigações laboriosas foram realizadas para se detectar o éter e como ele deveria interagir com objetos materiais. Essas pesquisas, entretanto, não produziram frutos e já no começo do século XX, em grande parte devido aos trabalhos de Einstein, a hipótese do éter caiu. Ondas eletromagnéticas propagam-se no vácuo sem qualquer tipo de suporte material. Uma interpretação mais aprofundada deste fato nos leva à teoria quântica, assunto que discutiremos na aula de conclusão do curso (Aula 18).

De modo geral, associaremos uma onda no espaço tridimensional a um campo $\psi = \psi(x, y, z, t)$, denotado de "função de onda". Mostraremos, agora, sob hipóteses bastante razoáveis, que ondas podem ser obtidas como soluções de equações diferenciais parciais – as célebres "equações de ondas". Considerando na nossa análise as ondas de mar, precisaremos de duas variáveis espaciais (x, y) que parametrizam a superfície do oceano na situação idealizada em que não há qualquer perturbação ondulatória. Assim, a função de onda $\psi(x, y, t)$ irá representar a altura local da onda, no instante de tempo t, na posição (x, y), de referência, sobre a superfície do mar. Uma simplificação adicional corresponde à situação onde ψ depende apenas de uma das variáveis espaciais, x, por exemplo, o que nos permite escrever, efetivamente, $\psi = \psi(x, t)$. Este caso é, aproximadamente, o que observamos quando as cristas de ondas de mar formam linhas paralelas, como mostrado na Fig.2. Uma onda em uma corda, por outro lado, é precisamente descrita por uma função de duas variáveis, $\psi = \psi(x, t)$.

Figura 1.2: O perfil de ondas dependentes apenas (aproximadamente) da coordenada que parametriza a direção de propagação (coordenada x na figura). As cristas de onda, portanto, alinham-se paralelamente umas às outras.

Suponha que as ondas da Fig.2 deslocam-se com velocidade v. Durante os instantes de tempo t_1 e t_2, o perfil da onda terá se deslocado em direção à praia de $v\Delta t$, onde $\Delta t = t_2 - t_1$. Veja a Fig. 3.

É um fato matemático simples que o gráfico de $f(x - a)$ corresponde àquele de $f(x)$ transladado para a direita de a. Portanto, a relação entre as

Figura 1.3: A onda representada na parte superior da figura deslocou-se de $v\Delta t$ para a direita, durante o intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$, como pode ser notado pelas posições do vale A e da crista B.

funções de onda nos instantes de tempo t_1 e t_2 é dada por

$$\psi(x - v\Delta t, t_1) = \psi(x, t_2) \ . \tag{1.3}$$

Façamos, por comodidade, $t_1 = 0$ e $t_2 = t$. A expressão anterior torna-se

$$\psi(x - vt, 0) = \psi(x, t) \ . \tag{1.4}$$

A Eq. (1.4) implica que as derivadas parciais de $\psi(x, t)$ em relação às variáveis x e t estão relacionadas entre si. De fato, temos

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\psi(x - vt, 0) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[\psi(x + h - vt, 0) - \psi(x - vt, 0)] \\
&-\frac{1}{v}\lim_{h/v\to 0}\frac{1}{h/v}[\psi(x - vt, 0) - \psi(x - v(t - h/v), 0)] = -\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\psi(x - vt, 0) \\
&= -\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\psi(x, t) \ ,
\end{aligned} \tag{1.5}$$

isto é, acabamos de deduzir que

$$(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t})\psi(x, t) = 0 \ , \tag{1.6}$$

ou, equivalentemente,

$$(\frac{\partial}{\partial t} - v\frac{\partial}{\partial x})\psi(x, t) = 0 \ . \tag{1.7}$$

Seria a Eq. (1.7) a procurada equação de ondas? Ainda não é! Basta notar que se estivessemos usando um sistema de coordenadas girado em relação ao sistema de coordenadas original, iriamos obter outra equação. Por exemplo, uma rotação horária de $\pi/2$ no sistema de coordenadas da Fig.3, levaria à seguinte equação:

$$(\frac{\partial}{\partial t} - v\frac{\partial}{\partial y})\psi = 0 \ , \tag{1.8}$$

enquanto que uma rotação horária de π levaria a

$$(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x})\psi = 0 \ . \tag{1.9}$$

Teriamos equações diferentes de acordo com o sistema de referência usado, o que, apesar de não ser algo errado, a princípio, não traria provavelmente qualquer vantagem formal. Queremos, outrossim, nos beneficiar da hipótese de *isotropia* da propagação ondulatória (não há uma direção previlegiada de propagação), procurando, dessa forma, estabelecer equações que sejam válidas em todos os sistemas de referência, arbitrariamente orientados no espaço. A esta propriedade, damos o nome de *covariância* das equações frente a transformações de rotação. O nosso mote é "aponte o eixo x para onde quiser e disponha de equações covariantes!"

Outra hipótese importante na nossa argumentação será o "princípio da superposição". Iremos supor que se ψ_1 e ψ_2 são ambas soluções de uma equação de ondas, então uma combinação linear arbitrária, $\psi_{12} = a\psi_1 + b\psi_2$, com a e b constantes, também será solução. Dessa forma, considerando a propagação ao longo do eixo x, gostariamos de escrever uma equação que tivesse como solução geral a função de onda $\psi(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)$, conhecida como "solução de D'Alembert", que representa a superposição de contribuições que se propagam para a direita e para a esquerda. As funções $f(x - vt)$ e $g(x + vt)$ satisfazem, respectivamente, as Eqs. (1.7) e (1.9). Notamos, então, que estas duas equações podem ser usadas para se produzir uma terceira equação que possui as soluções de D'Alembert: aplicamos o operador $\partial/\partial t + v\partial/\partial x$ sobre a Eq. (1.7), para obter

$$\begin{aligned} &(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x})(\frac{\partial}{\partial t} - v\frac{\partial}{\partial x})\psi \\ &= (\frac{\partial}{\partial t} - v\frac{\partial}{\partial x})(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x})\psi \\ &= (\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2\frac{\partial^2}{\partial x^2})\psi = 0 \ . \end{aligned} \tag{1.10}$$

As soluções da Eq. (1.10) possuirão, de fato, a forma de D'Alembert. Restanos, apenas, resolver o problema da isotropia, pois (1.10) previlegia obviamente a direção x. Esta equação pode ser transformada em uma expressão covariante de modo bastante direto, "promovendo" $\partial^2/\partial x^2$ ao operador laplaciano $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$:

$$(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2\nabla^2\psi) = 0 \ . \tag{1.11}$$

O Resultado (1.11) é, finalmente, a "equação de ondas". Não obstante a nossa análise ter sido desenvolvida para o caso de ondas definidas em um espaço bidimensional, o problema tridimensional não apresenta maiores dificuldades. Basta usar, em (1.11), o laplaciano usual $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial y^2$.

De agora em diante, salvo em casos explicitamente mencionados, estaremos considerando a versão tridimensional da equação de ondas.

É importante enfatizar que o princípio da superposição de ondas é, na verdade, uma aproximação. Nos casos em que a radiação interage com a matéria, como em fibras óticas ou lasers, evidencia-se, em regimes de campos intensos, a ausência de superposição linear. Até mesmo no vácuo, efeitos quânticos de auto-interação do campo eletromagnético invalidam o princípio de superposição. De qualquer forma, o princípio da superposição é uma ótima aproximação no eletromagnetismo, pertinente em um grande número de circunstâncias práticas.

Atividade 1

Considerando a equação de ondas (1.11) em duas dimensões espaciais, mostre que esta é, de fato, covariante frente à rotações arbitrárias.

Resposta comentada

Seja S' um sistema de coordenadas, no plano, girado de um ângulo θ, no sentido anti-horário, em relação a S. A transformação das coordenadas de (x,y) de S, para as coordenadas de (x',y') de S', é dada por

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + y\,\mathrm{sen}\,\theta \\ y' &= -x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta\ . \end{aligned} \tag{1.12}$$

Aplicando a regra da cadeia, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y'} \\ &= \cos\theta\frac{\partial}{\partial x'} - \mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial}{\partial y'} \end{aligned} \tag{1.13}$$

e, assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= (\cos\theta\frac{\partial}{\partial x'} - \mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial}{\partial y'})^2 \\ = &\quad (\cos\theta)^2\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + (\mathrm{sen}\,\theta)^2\frac{\partial^2}{\partial y'^2} - 2\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial^2}{\partial x'\partial y'}\ . \end{aligned} \tag{1.14}$$

Seguindo passos análogos, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^2} &= (\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial}{\partial x'} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial y'})^2 \\ = &\quad (\mathrm{sen}\,\theta)^2\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + (\cos\theta)^2\frac{\partial^2}{\partial y'^2} + 2\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial^2}{\partial x'\partial y'}\ . \end{aligned} \tag{1.15}$$

Usando (1.14) e (1.15), encontramos

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2}\ . \tag{1.16}$$

Isto é, o laplaciano possui a mesma forma nos referenciais S e S', o que prova a covariância da equação de ondas (1.11) frente a transformações de rotação.

Fim da atividade

Ondas harmônicas planas e esféricas

Soluções extremamente importantes da equação de ondas (1.11) correspondem às *ondas harmônicas planas* e *ondas harmônicas esféricas*. Estas soluções são valiosas pois pertencem a bases de funções – os modos harmônicos do campo ψ – sobre a qual *qualquer* onda pode ser expandida, lançando mão do princípio da superposição linear.

Ondas harmônicas planas

Uma solução de onda harmônica plana é obtida a partir de duas condições bastante simples para o campo $\psi = \psi(\vec{r}, t)$: exigimos que

(i) tomando um ponto arbitrário do espaço, (x, y, z), a função de onda ψ oscile harmonicamente no tempo com frequência angular ω, isto é, escrevemos $\psi(\vec{r}, t) = f(\vec{r}) \cos(\omega t - \phi)$, onde ϕ é uma constante arbitrária.

(ii) a onda propague-se com velocidade v ao longo de uma direção bem definida $\hat{n}$ do espaço.

Fazendo $\hat{n} = \hat{x}$, sem perda de generalidade, a condição (ii) implica que $\psi(\vec{r}, t) = g(x - vt, y, z)$, para alguma função g com domínio no espaço tridimensional. Usando a condição (i), teremos, portanto,

$$g(x - vt, y, z) = f(\vec{r}) \cos(\omega t - \phi) \ . \tag{1.17}$$

Considerando $x = 0$ na equação acima, obtemos

$$g(-vt, y, z) = f(0, y, z) \cos(\omega t - \phi)] \ . \tag{1.18}$$

Substituindo,agora, t por $t - x/v$ em (1.18), encontramos

$$\psi(\vec{r}, t) = g(x - vt, y, z) = f(0, y, z) \cos(kx - \omega t + \phi) \ , \tag{1.19}$$

onde k é obtido da relação

$$v = \frac{\omega}{k} \ . \tag{1.20}$$

Ainda nos falta determinar como $f(0, y, z)$ depende de y e z. Com esse propósito, substituimos (1.19) na equação de ondas (1.11), obtendo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \ . \tag{1.21}$$

Supondo que $f(0, y, z)$ seja um campo limitado e sem singularidades em todo o espaço (o que é um exemplo do que os físicos costumam chamar de campo "bem comportado"), a Eq. (1.21) admite apenas como solução $f(0, y, z)$ constante. Dessa forma, concluimos que as hipóteses (i) e (ii) conduzem à seguinte solução da equação de ondas (onda harmônica plana):

$$\psi(\vec{r}, t) = A\cos(kx - \omega t + \phi) \ . \tag{1.22}$$

Acima, $A > 0$ é a *amplitude* de vibração, ω é a *frequência angular*, k é o *número de onda* e $0 < \phi < 2\pi$ é a *constante de fase* da onda. A Fig. (1.4) contém um esboço de (1.22) para $t = 0$ e $\phi = 0$.

Figura 1.4: Onda harmônica de número de onda k e amplitude A

Examinando a Fig. 4 percebemos claramente que a menor distância entre duas cristas diferentes (ou, mais genericamente, entre dois pontos da onda que tenham diferença de fase de 2π) é $\lambda = 2\pi/k$, quantidade chamada de *comprimento de onda*. Usando (1.20), podemos escrever $v = \lambda\omega/2\pi$. Note, entretanto, que a frequência da onda (número de ciclos por unidade de tempo em um ponto fixo do espaço) é $\nu = \omega/2\pi$ (obs: a unidade de frequência no SI é o Hertz (Hz). 1 Hz = 1 ciclo/segundo). Assim, a velocidade da onda pode ser escrita em termos da frequência e do comprimento de onda como $v = \lambda\nu$.

Podemos nos "libertar"do caso particular tratado acima, onde $\hat{n} = \hat{x}$ e escrever, de maneira completamente geral, uma onda plana como

$$\psi(\vec{r}, t) = A\cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \phi) \ , \tag{1.23}$$

onde $\vec{k} = \hat{n}k$ é o *vetor número de onda* que indica a direção e o sentido de propagação da onda. A palavra "plana"em "onda harmônica plana"significa que as regiões do espaço que possuem a *mesma* fase $\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi$, em determinado instante de tempo, são dadas por $\vec{k} \cdot \vec{r} = constante$, ou seja, correspondem à superfícies planas, perpendiculares à direção de propagação da onda. Costuma-se chamar as superfícies planas associadas às cristas de "frentes de onda". Uma representação visual de ondas harmônicas planas, portanto, é dada por uma sequência de planos paralelos – as frentes de onda – que se deslocam com velocidade v e estão afastados uns dos outros de um comprimento de onda λ. veja a Fig.5.

Figura 1.5: Frentes de onda plana, propagando-se ao longo do eixo y.

Ondas harmônicas esféricas

Uma pedra lançada sobre o espelho de água de um lago provoca o surgimento de ondas na forma de círculos concêntricos que emanam a partir da posição de onde a pedra afundou. No espaço tridimensional, ondas análogas correspondem às ondas esféricas, observadas, de fato, nos domínios da acústica e do eletromagnetismo (notamos, de passagem, que essa mesma analogia e a natureza ondulatória do som e da luz foi conjecturada por Leonardo da Vinci ainda no século XV, muito antes do início da era moderna da física).

Uma onda esférica não possui, obviamente, uma direção bem definida de propagação. Mantemos, todavia, a exigência (i) da discussão anterior sobre ondas planas, trocando a condição (ii) pela seguinte:

(ii') a função de onda depende, para cada instante de tempo t, apenas da coordenada radial r, em coordenadas esféricas.

A condição (ii') implica nos diz que o centro da onda corresponde à origem do sistema de coordenadas. Escrevemos

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi(r, t) \ . \tag{1.24}$$

Substituindo (1.24) na equação de ondas (1.11), obtemos (usando a forma do laplaciano em coordenadas esféricas),

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\psi) - v^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi) = 0 \ . \tag{1.25}$$

A equação acima tem a forma da equação de ondas unidimensional para $r\psi$!. Consequentemente, apresentará, como solução geral, a solucão de D'Alembert,

$$r\psi(r,t) = f(r - vt) + g(r + vt) \ , \tag{1.26}$$

isto é,

$$\psi(r,t) = \frac{1}{r} f(r - vt) + \frac{1}{r} g(r + vt) \ . \tag{1.27}$$

A condição (i), entretanto, exige que

$$\psi(r,t) = F(r) \cos(\omega t + \phi) \ . \tag{1.28}$$

Analogamente ao caso de ondas planas, a única maneira de compatibilizar as duas últimas relações é escrever

$$\psi(r,t) = \frac{A_1}{r} \cos(kr - \omega t + \phi_1) + \frac{A_2}{r} \cos(kr - \omega t + \phi_2) \ , \tag{1.29}$$

onde, como antes, $v = \omega/k$. As frentes de onda, agora, possuem a forma de superfícies esféricas concêntricas afastadas umas das outras de um comprimento de onda $\lambda = 2\pi/k$. Os termos de amplitudes A_1 e A_2, correspondem, respectivamente, a ondas que se propagam para fora e para dentro da origem. Em problemas de interesse físico, ondas esféricas são produzidas para fora de regiões onde encontram-se as perturbações geradoras das ondas. Fazemos, portanto, $A_2 = 0$. Outra maneira de se entender a imposição $A_2 = 0$ consiste em evocar o princípio da causalidade: uma perturbação que ocorre na origem precederá necessariamente a perturbação na onda produzida em um ponto afastado do espaço, e não o oposto.

Expansões na base de ondas harmônicas planas

O conjunto de ondas harmônicas planas pode ser usado como *uma base completa* no espaço das funções de onda. O princípio da superposição nos permite escrever uma função de onda arbitrária como

$$\psi(\vec{r},t) = \int d^3k A(\vec{k}) \cos[\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t + \phi(\vec{k})] \ , \tag{1.30}$$

onde $\omega_k \equiv vk$ é a frequência angular, linear em k, e $A(\vec{k})$ e $\phi(\vec{k})$ são, respectivamente, a amplitude e a fase associadas ao vetor número de onda $\vec{k}$. Em

(1.30), $\psi(\vec{r},t)$ é representada como uma integral (isto é, uma superposição) de ondas planas harmônicas. A Expressão (1.30) corresponde à familiar técnica da decomposição em modos de Fourier, aplicada aqui ao problema específico da propagação ondulatória.

A título de informação, mencionamos que uma expressão inteiramente análoga à Eq. (1.30) pode ser escrita em uma base alternativa que contém as ondas esféricas como membros do seu conjunto. É a chamada base de *harmônicos esféricos*. Estaremos concentrados, entretanto, na maior parte dos casos, em problemas que envolvem apenas ondas planas.

Ondas eletromagnéticas no vácuo

Vamos entender, agora de que forma as equações fundamentais do eletromagnetismo, isto é, as equações de Maxwell, implicam a existência de ondas eletromagnéticas. No vácuo, onde as densidades de carga e corrente são nulas, as equações de Maxwell são escritas como

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \ , \tag{1.31}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \ , \tag{1.32}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} \ , \tag{1.33}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} \ . \tag{1.34}$$

Tomando o rotacional da Eq. (1.33), obtemos

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\times\vec{B} \ . \tag{1.35}$$

Por outro lado, é um resultado puramente matemático que

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) - \nabla^2\vec{E} \ . \tag{1.36}$$

De acordo com (1.31), a Eq. (1.36) torna-se

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\nabla^2\vec{E} \ . \tag{1.37}$$

Usando, então, (1.34) e (1.37) em (1.35), obtemos, sem dificuldades,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} - c^2\nabla^2\vec{E} = 0 \ , \tag{1.38}$$

onde c é dado pela Expressão (1.1). Uma análise completamente análoga para o campo magnético (o ponto de partida é tomar o rotacional da Eq.

(1.34)), nos conduzirá, semelhantemente, à

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{B} - c^2\nabla^2\vec{B} = 0 \ , \quad . \tag{1.39}$$

As Eqs. (1.38) e (1.39) nos mostram que cada componente de campo elétrico ou magnético, no vácuo, satisfaz a uma equação de ondas, com velocidade de propagação c.

O valor numérico teorizado de c foi inicialmente calculado em função das constantes ϵ_0 e μ_0. Entretanto, devido ao fato da velocidade da luz ser, na realidade, uma constante da natureza, define-se, atualmente, o seguinte valor para c:

$$c = 299.792.458 \ \ m/s \ . \tag{1.40}$$

Este valor é exato. Não é um valor calculado ou medido, é um valor imposto. É claro que essa imposição não é arbitrária, mas é baseada na teoria e na observação. É a partir do valor pre-fixado de c que se define a unidade de comprimento. O metro é a distância percorrida pela luz na fração de 1/299792458 de segundo. O que é um segundo? um segundo corresponde ao intervalo de tempo associado a 9.192.631.770 períodos da radiação emitida pelo átomo de Césio 133 durante uma determinada transição atômica (os relógios atômicos de Césio são extremamente precisos. A hora oficial brasileira provém de um relógio de Césio situado no observatório do Valongo, no Rio de Janeiro. Este relógio atrasa um segundo a cada 65 mil anos. Nada mal!).

Podemos aplicar, imediatamente, o nosso conhecimento a respeito de ondas harmônicas planas para obter soluções ondulatórias para campos elétricos de frequência bem definida. Neste caso, escrevemos as componentes do campo elétrico da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} E_x(\vec{r},t) &= E_{0x}\cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \phi_x) \ , \\ E_y(\vec{r},t) &= E_{0y}\cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \phi_y) \ , \\ E_z(\vec{r},t) &= E_{0z}\cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \phi_z) \ , \end{aligned} \tag{1.41}$$

onde $c = \omega/k$. Definimos, acima, três amplitudes de campo (E_{0x}, E_{0y} e E_{0z}) e três constantes de fase (ϕ_x, ϕ_y e ϕ_z). É conveniente, como veremos, fazer uso da representação complexa, introduzindo o vetor

$$\vec{E}_0 = E_{0x}\exp(i\phi_x)\hat{x} + E_{0y}\exp(i\phi_y)\hat{y} + E_{0z}\exp(i\phi_z)\hat{z} \ . \tag{1.42}$$

O campo elétrico complexo

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0\exp[i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)] \tag{1.43}$$

não apenas satisfaz à equação de ondas (1.38), bem como nos dá o campo elétrico físico, ao se tomar a sua parte real, cujas componentes estão escritas em (1.41).

Adicionalmente, aplicando a expressão (1.43) nas Eqs. (1.31) e (1.33), obtemos

$$\vec{k} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = 0 \tag{1.44}$$

e a expressão para o campo magnético complexo,

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \hat{k} \times \vec{E}(\vec{r}, t) \ . \tag{1.45}$$

Como consequência de (1.44) e (1.45), vemos que os três vetores

$$\vec{k} \ , \ Re(\vec{E}) \ , \ Re(\vec{B}) \tag{1.46}$$

formam um *triedro* ortogonal no espaço. Os campos elétricos e magnéticos em uma onda plana são perpendiculares entre si, e perpendiculares à direção de propagação da onda, indicada por $\vec{k}$. É por isto que dizemos que ondas eletromagnéticas são transeversais. A Fig.6 ilustra a geometria de uma onda harmônica plana eletromagnética, também conhecida como “onda monocromática”, por possuir uma frequência de oscilação bem definida.

Figura 1.6: Campos elétricos e magnéticos em uma onda monocromática que se propaga ao longo do eixo y.

Ondas monocromáticas são idealizações dificilmente encontradas na natureza espontaneamente. Entretanto, a tecnologia humana foi capaz de produzir tais ondas, por meio de dispositivos de laser. Um feixe de laser é, em ótima aproximação, uma onda plana monocromática. A luz produzida por uma lâmpada comum, ou a radiação eletromgnética que nos circunda é formada pela superposição *incoerente* de propagação de frequências e direções variadas.

A radiação eletromagnética visível, compreende a faixa de frequências que vai de cerca de 1.0×10^5 Hz, no violeta, até 3.0×10^5 Hz na região próxima ao infra-vermelho. Os comprimentos de onda correspondem, respectivamente, a 0.3 μm e 1.0 μm. As ondas observadas de maior frequência são os *raios gama*, produzidos em transições nucleares, com frequências da ordem de 10^{22} Hz e comprimentos de onda de cerca de 10^{-13} m (observe que o núcleo atômico tem raio de cerca de 10^{-15} m). As menores frequências detectáveis, são as *rádio frequências*, na faixa de 10^3 Hz, e comprimentos de onda de cerca de 10^3 km.

Estados de polarização

Sem perda de generalidade, consideremos uma onda plana monocromática de frequência ω que propaga na direção $\hat{z}$ e façamos $\phi_x = 0$ e $\phi_y \equiv \phi$. Devido à Expressão (1.44) teremos:

$$\begin{aligned} E_x(\vec{r}, t) &= E_{0x} \cos(kz - \omega t) \ , \\ E_y(\vec{r}, t) &= E_{0y} \cos(kz - \omega t + \phi) \ , \\ E_z(\vec{r}, t) &= 0 \ . \end{aligned} \tag{1.47}$$

Fixando um ponto qualquer sobre o eixo z, por exemplo, $z = 0$, vamos estudar a vibração do campo elétrico ali, isto é, estamos interessados em classificar o comportamento do vetor campo elétrico

$$\vec{E}_0(t) = E_{0x} \cos(\omega t)\hat{x} + E_{0y} \cos(\omega t + \phi)\hat{y} \ . \tag{1.48}$$

As oscilações em outro ponto sobre o eixo z seriam idênticas, salvo de uma defasagem fixa. Vamos distinguir, aqui, algumas situações de interesse:

(i) $\phi = 0$ ou $\phi = \pi$.

Neste caso, o vetor $\vec{E}_0(t)$ oscila linearmente no plano xy. Este é o caso de *polarização linear* da radiação. O *ângulo de polarização* θ é o ângulo entre a direção de vibração do campo e o eixo x. Isto é, $\tan(\theta) = E_{0y}/E_{0x}$.

(ii) $\phi = \pi/2$

O campo elétrico oscila ao longo de uma elipse, no sentido horário. Este é o caso de *polarização elíptica à esquerda* (usando a regra da mão-direita, com o polegar apontando na direção de propagação, percebemos que polarização à esquerda corresponde ao sentido de circulação horário no plano xy). A elipse possui seus eixos paralelos aos eixos x e y.

(iii) $\phi = 3\pi/2$.

Situação análoga ao caso anterior, agora de *polarização elíptica à esquerda*.

(iv) $\phi \neq 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$

Corresponde à situação de polarização elíptica (direita ou esquerda), com eixos principais diferentes dos eixos x e y.

A Fig. 7 resume os casos de polarização discutidos aqui.

Figura 1.7: Estados de polarização linear e elíptica.

Nos casos especiais em que a elipse de polarização reduz-se a uma circunferência, costuma-se chamar esse estado de *polarização circular* do campo eletromagnético.

Atividade 2

Obtenha o campo magnético associado à onda plana dada por (1.47).

Resposta comentada

O campo elétrico é dado por

$$\vec{E}(\vec{r},t) = E_{0x}\cos(kz-\omega t)\hat{x} + E_{0y}\cos(kz-\omega t+\phi)\hat{y}\ . \tag{1.49}$$

Usando a Eq. (1.45), com $\hat{k}=\hat{z}$, obtemos

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{1}{z}\hat{k}\times\vec{E} = -\frac{1}{c}E_{0y}\cos(kz-\omega t+\phi)\hat{x} + \frac{1}{c}E_{0x}\cos(kz-\omega t)\hat{y}\ . \tag{1.50}$$

Fim da atividade

Ondas eletromagnéticas em meios materiais

Faremos aqui um aceno à propagação de ondas eletromagnéticas na matéria. Poderiamos considerar separadamente os meios isolantes (dielétricos) para depois, então, estudarmos a propagação em meios condutores. Entretanto, a discussão pode ser realizada de maneira unificada, se lembrarmos que os meios materiais mais simples – chamados de meios lineares – são caracterizados essencialmente por três quantidades:

(a) μ, a permissividade magnética;

(b) ϵ, a constante dielétrica;

(c) σ, a condutividade elétrica.

O eletromagnetismo no interior destes meios materiais, é, em primeira aproximação, parametrizada por estes parâmetros. Os parâmetros em (a) e (b) são devidos à efeitos de polarização linear do meio material (veja a Aula 11). A condutividade elétrica entrará nas equações de Maxwell com o auxílio da lei de Ohm que estabelece a proporcionalidade entre densidade de corrente e campo elétrico, isto é,

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \ . \tag{1.51}$$

Substituindo esta expressão para $\vec{J}$ nas equações de Maxwell, e trocando ϵ_0 e μ_0 por ϵ e μ, obtemos

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \ , \tag{1.52}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \ , \tag{1.53}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} \ , \tag{1.54}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu\sigma\vec{E} + \mu\epsilon\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} \ . \tag{1.55}$$

Seguindo os mesmo passos que conduziram às equações de ondas para os campos elétrico e magnético, encontraremos, agora, as seguintes equações modificadas:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} - \frac{1}{\epsilon\mu}\nabla^2\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} \ , \tag{1.56}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{B} - \frac{1}{\epsilon\mu}\nabla^2\vec{B} = \frac{\sigma}{\epsilon}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} \ . \tag{1.57}$$

Apesar de as Eqs. (1.56) e (1.57) não serem exatamente equações de ondas, elas admitem soluções na forma de ondas planas, tais como (em representação complexa)

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp[i(kz - \omega t)] \ , \tag{1.58}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \exp[i(kz - \omega t)] \ . \tag{1.59}$$

Se tivessemos $\sigma = 0$, não encontrariamos qualquer novidade formal. As Eqs. (1.56) e (1.57), tornar-se-iam equações convencionais de ondas, com velocidade de propagação $v = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$. A surpresa surge nas situações em que $\sigma \neq 0$. De fato, substituindo (1.58) na Eq. (1.56), por exemplo, obtemos uma equação para o número de onda k:

$$k^2 = \mu\epsilon\omega^2 + i\mu\sigma\omega \ . \tag{1.60}$$

Isto é, k possui parte imaginária não-nula!. Fazendo $k = k_1 + ik_2$, obtemos, da relação anterior,

$$k_1 = \omega\sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}}\sqrt{\sqrt{1+(\sigma/\epsilon\omega)^2}+1} \ , \tag{1.61}$$

$$k_2 = \omega\sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}}\sqrt{\sqrt{1+(\sigma/\epsilon\omega)^2}-1} \ . \tag{1.62}$$

O campo elétrico complexo fica dado por

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(-k_2 z) \exp[i(k_1 z - \omega t)] \ , \tag{1.63}$$

ou seja, a componente imaginária de k está associada à *atenuação* das ondas eletromagnéticas no interior de um condutor. O comprimento típico ao longo do qual uma onda eletromagnética se propaga no interior de um condutor é dado pelo *comprimento de penetração*

$$d \equiv \frac{1}{k_2} \ . \tag{1.64}$$

Observe que no limite em que $\sigma \to \infty$, temos $k_2 \to \infty$ e, assim, $d \to 0$, o que quer dizer que em condutores onde não há dissipação ohmica (como em supercondutores) a blindagem produzida pelas cargas livres de condução torna-se perfeita.

Atividades finais

1. Um filme *polarizador linear* é uma lâmina que faz com que a radiação que a atravesse torne-se linearmente polarizada ao longo de uma certa direção do espaço (perpendicular à direção de polarização), chamada de "eixo principal". O polarizador deixa passar apenas a projeção do campo elétrico ao longo do eixo principal. Suponha que um determinado polarizador filtre a onda plana dada por (13.47), e que seu eixo principal seja $\hat{x}$. Descreva a onda que emerge do polarizador.

2. Considere a onda (13.47) com $E_{0x} = E_{0y} = E_0$ e $\phi = \pi/3$. Descreva o estado de polarização.

3. Mais uma vez, considere a onda (13.47). Obtenha a densidade média de energia desta onda.

4. Suponha que uma onda circularmente polarizada atravessa um polarizador linear. Como muda a densidade de energia eletromagnética neste processo?

Respostas comentadas

1. O polarizador irá aniquilar a componente y do campo elétrico. O campo elétrico de saída do polarizador será dado, portanto, por

$$
\begin{aligned}
E_x(\vec{r},t) &= E_{0x}\cos(kz-\omega t)\ ,\\
E_y(\vec{r},t) &= 0\ ,\\
E_z(\vec{r},t) &= 0\ .
\end{aligned} \tag{1.65}
$$

2. Um artifício útil é somar a constante de fase $-\phi/2 = -\pi/6$ nas fases de $E_x(0,t)$ e $E_y(0,t)$. Obtemos

$$
\begin{aligned}
E_x(0,t) &= E_0\cos(\omega t+\pi/6) = \frac{E_0}{2}[\sqrt{3}\cos(\omega t) - \mathrm{sen}(\omega t)]\ ,\\
E_y(0,t) &= E_0\cos(\omega t-\pi/6) = \frac{E_0}{2}[\sqrt{3}\cos(\omega t) + \mathrm{sen}(\omega t)]\ .
\end{aligned} \tag{1.66}
$$

O campo elétrico gira no sentido anti-horário. Trata-se de polarização elíptica à direita. Observe que

$$
\frac{1}{3}[E_x(0,t)+E_y(0,t)]^2 + [E_x(0,t)-E_y(0,t)]^2 = E_0^2\ . \tag{1.67}
$$

Como $E_x(0,t)+E_y(0,t)$ e $E_x(0,t)-E_y(0,t)$ são proporcionais às componentes de campo elétrico em um sistema de referência girado de $\pi/2$ no sentido anti-horário, reconhecemos em (1.67) a equação de uma elipse, com seus eixos principais paralelos às direções dadas por $\hat{x}+\hat{y}$ e $\hat{y}-\hat{x}$.

3. A densidade de energia eletromagnética é dada por

$$
u = \frac{\epsilon_0}{2}\vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2\ . \tag{1.68}
$$

Substituindo nesta expressão o campo dado por (13.47) e o campo magnético obtido na Atividade 2 do texto, encontramos, após tomar a média sobre as oscilações temporais das funções harmônicas,

$$
u = \frac{\epsilon_0}{4}(E_{0x}^2+E_{0y}^2) + \frac{1}{4c^2\mu_0}(E_{0x}^2+E_{0y}^2) = \frac{\epsilon_0}{2}(E_{0x}^2+E_{0y}^2)\ . \tag{1.69}
$$

4. Uma onda circularmente polarizada que se propaga ao longo do eixo z possui $E_{0x} = E_{0y} = E_0$. Sua densidade de energia média é, portanto (veja a atividade anterior),

$$u = \epsilon_0 E_0^2 \ . \tag{1.70}$$

Após a passagem de radiação pelo polarizador linear, uma das componentes do campo elétrico é aniquilada. A densidade média será, agora,

$$u' = \frac{\epsilon_0}{2} E_0^2 \ . \tag{1.71}$$

Isto é, $u' = u/2$. A energia média contida em uma onda circularmente polarizada é reduzida por um fator $1/2$ após a passagem por um polarizador linear.

Resumo

Ondas são perturbações de campos físicos, em meios materiais ou não, que se propagam deacordo com equações diferenciais parciais de segunda ordem, chamadas de "equações de ondas". Uma classe especial de soluções destas equações são as ondas harmônicas planas (essencialmente, são os modos de Fourier do campo ondulatório). As equações de Maxwell no vácuo implicam que campos elétricos e magnéticos satisfazem a equações de ondas, com velocidade de propagação dada por $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$. Nas ondas planas eletromagnéticas os campos elétrico e magnético são perpendiculares entre si e perpendiculares à direção de propagação. Adicionalmente, o perfil de vibração dos campos pode ser classificado de acordo com o seu estado de polarização (elíptico ou linear). A propagação de ondas eletromagnéticas em meios materiais lineares é semelhante à propagação no vácuo no caso de isolantes. No caso de condutividade não-nula, a propagação de radiação é atenuada, isto é, campos eletromagnéticos são completamente absorvidos em condutores.