Energia e Momento Linear do Campo Eletromagnético

Metas

- Generalizar a lei de conservação da energia e do momento linear de forma a incluir fenômenos eletromagnéticos;
- Deduzir as expressões para as densidades de corrente de energia e momento linear transportados pelo campo eletromagnético;
- Introduzir o conceito de pressão de radiação.

Objetivos

Ao terminar esta aula você deverá ser capaz de:

- Determinar as densidades de corrente de energia e momento linear eletromagnéticos para campos arbitrários;
- Obter a pressão de radiação produzida por radiação eletromagnética que incide sobre superfícies arbitrárias.

Introdução

O propósito desta aula, relativamente curta, é mostrar que a lei de conservação da energia e do momento linear pode ser estendida aos fenômenos eletromagnéticos, levando em conta a interação entre os campos e a matéria. Em outras palavras, mostraremos que se o momento linear ou a energia cinética de um sistema de cargas varia no tempo, esta variação é compensada, exatamente, pela variação de momento ou energia contidos no campo eletromagnético. Cargas e campos formam, portanto, um sistema físico fechado.

Carga elétrica no campo de onda plana

Um exemplo simples nos fará ver que ondas eletromagnéticas planas transportam energia e momento. Considere uma partícula de carga q e massa m, sobre a qual incide uma onda eletromagnética plana, como representado na Figura 14.1.

Fig. 14.1: Uma onda eletromagnética plana incide sobre uma partícula carregada.

Suponhamos que uma onda se propaga ao longo do eixo z e tenha seus campos elétrico e magnético dados por

$$\begin{aligned} \vec{E}(z,t) &= \vec{E}_0 \cos(kz - \omega t) \\ \vec{B}(z,t) &= \vec{B}_0 \cos(kz - \omega t) \ , \end{aligned} \tag{14.1}$$

onde

$$\begin{aligned} \vec{E}_0 &= E_0 \hat{x} \\ \vec{B}_0 &= \frac{E_0}{c} \hat{y} \ . \end{aligned} \tag{14.2}$$

Note que $\vec{B}_0 = \hat{z} \times \vec{E}_0 / c$, como de fato tem de ser em uma onda eletromagnética plana (veja a Aula 13).

A equação de movimento da partícula é, portanto,

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \ , \tag{14.3}$$

onde $\vec{E}$ e $\vec{B}$ são dados pelas Eqs. (14.1) e (14.2). Escrevendo, agora, a velocidade em termos de suas componentes cartesianas,

$$\vec{v}(t) = v_1(t)\hat{x} + v_2(t)\hat{y} + v_3(t)\hat{z} \ , \tag{14.4}$$

a Eq. (14.3) transforma-se em

$$m \frac{dv_1}{dt} = qE_0 \cos(kz - \omega t) - q\frac{E_0}{c} v_3 \cos(kz - \omega t) \ , \tag{14.5}$$

$$m \frac{dv_2}{dt} = 0 \ , \tag{14.6}$$

$$m \frac{dv_3}{dt} = q\frac{E_0}{c} v_1 \cos(kz - \omega t) \ . \tag{14.7}$$

Multiplicando as Eqs. (14.5), (14.6) e (14.7) por v_1, v_2 e v_3, respectivamente, e somando as equações resultantes, encontramos

$$\frac{m}{2}\frac{d}{dt}(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) = qE_0 v_1 \cos(kz - \omega t) = mc\frac{dv_3}{dt} \ . \tag{14.8}$$

Usamos, na dedução da segunda igualdade acima, a Eq. (14.7). O lado esquerdo de (14.8) é exatamente a taxa de variação no tempo da energia cinética E_c da partícula; o lado direito, por outro lado, é a taxa de variação no tempo do momento linear P_z ao longo do eixo z. Consequentemente, durante um intervalo qualquer de tempo, os incrementos de energia e momento da partícula estarão relacionados da seguinte maneira:

$$\Delta E_c = c\Delta P_z \ . \tag{14.9}$$

A Eq. (14.9) mostra a forma específica com a qual a partícula ganha momento linear e energia devido à sua interação com o campo eletromagnético. Acreditando na validade universal da lei de conservação da energia, a Eq. (14.9) parece nos sugerir que a energia e o momento linear de ondas planas eletromagnéticas estão linearmente relacionados. De fato, isso é correto, como discutiremos em detalhes na próxima seção.

Densidade de corrente de energia

Na Aula 11, notamos que a densidade de energia total contida no campo eletromagnético pode ser escrita como

$$u = \frac{\epsilon_0}{2}\vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2 \ . \tag{14.10}$$

Verifiquemos, sob uma luz ligeiramente diferente, a validade de (14.10). Considere um sistema arbitrário de cargas distribuidas continuamente no interior de uma região Ω do espaço. A superfície que limita Ω será denotada aqui por $\partial\Omega$. Veja a Figura 14.2. O sistema de cargas é completamente caracterizado pela densidade de massa $\rho_m(\vec{r}, t)$, pela densidade de carga $\rho(\vec{r}, t)$ e pelo campo de velocidade $\vec{v}(\vec{r}, t)$.

A energia total do sistema, U, é a soma da energia cinética total associada à distribuição de cargas e a energia eletromagnética, isto é,

$$U = \int_\Omega d^3\vec{r}\frac{1}{2}\rho_m\vec{v}^2 + \int_\Omega d^3\vec{r}(\frac{\epsilon_0}{2}\vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2) \ . \tag{14.11}$$

Fig. 14.2: Sistema de cargas elétricas contido em Ω.

A taxa de variação de U no tempo, dU/dt, contém três contribuições que representaremos assim:

$$\frac{dU}{dt} = I_1 + I_2 + I_3 \; . \tag{14.12}$$

A primeira contribuição é

$$I_1 = \frac{d}{dt}\int_\Omega d^3\vec{r}\frac{1}{2}\rho_m \vec{v}^2 = \int_\Omega d^3\vec{r}\rho_m\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} \; . \tag{14.13}$$

No integrando acima,

$$\rho_m\frac{d\vec{v}}{dt} \tag{14.14}$$

é a força por unidade de volume que atua sobre o sistema de partículas, isto é,

$$\rho_m\frac{d\vec{v}}{dt} = \rho(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}) \; . \tag{14.15}$$

Substituindo (14.15) em (14.13), encontramos

$$I_1 = \int_\Omega d^3\vec{r}\rho_m\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} = \int_\Omega d^3\vec{r}\rho\vec{v}\cdot\vec{E} = \int_\Omega d^3\vec{r}\vec{J}\cdot\vec{E} \; , \tag{14.16}$$

onde $\vec{J} = \rho\vec{v}$ é a densidade de corrente elétrica.

A segunda contribuição, devida ao campo elétrico, é dada por

$$I_2 = \frac{\epsilon_0}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega d^3\vec{r}\vec{E}^2 = \epsilon_0\int_\Omega d^3\vec{r}\vec{E}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} \; . \tag{14.17}$$

Lançando mão da lei de Ampère-Maxwell,

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} \; , \tag{14.18}$$

isolamos e substituimos $\partial\vec{E}/\partial t$ em (14.17), obtendo

$$I_2 = \frac{1}{\mu_0}\int_\Omega d^3\vec{r}\vec{E}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{B} - \int_\Omega d^3\vec{r}\vec{J}\cdot\vec{E} \; . \tag{14.19}$$

A terceira contribuição, esta associada à energia magnética, é

$$I_3 = \frac{1}{2\mu_0}\frac{d}{dt}\int_\Omega d^3\vec{r}\vec{B}^2 = \frac{1}{\mu_0}\int_\Omega d^3\vec{r}\vec{B}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} \; . \tag{14.20}$$

Analogamente ao tratamento da segunda contribuição, usamos, agora, a lei de Faraday,

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} \tag{14.21}$$

que nos permite re-escrever (14.20) como

$$I_3 = -\frac{1}{\mu_0}\int_{\Omega} d^3\vec{r}\vec{B} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E} \ . \tag{14.22}$$

Reunindo as expressões para I_1, I_2 e I_3, obtemos

$$\frac{dU}{dt} = \frac{1}{\mu_0}\int_{\Omega} d^3\vec{r}(\vec{E} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} - \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E}) \ . \tag{14.23}$$

Note que (verifique!)

$$\vec{E} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} - \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) \ , \tag{14.24}$$

de forma que a (14.23) venha a ser escrita como

$$\frac{dU}{dt} = \frac{1}{\mu_0}\int_{\Omega} d^3\vec{r}\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) \ , \tag{14.25}$$

ou ainda, usando o teorema de Gauss, como a integral de fluxo,

$$\frac{dU}{dt} = \frac{1}{\mu_0}\oint_{\partial\Omega} d\vec{A} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) \equiv \oint_{\partial\Omega} d\vec{A} \cdot \vec{S} \ , \tag{14.26}$$

onde

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B} \tag{14.27}$$

é o chamado *vetor de Poynting*. De acordo, com a (14.26), o fluxo do vetor de Poynting sobre a superfície $\partial\Omega$ que encerra o sistema de cargas, é responsável pela variação de energia do mesmo sistema. Ou seja, o vetor de Poynting é, precisamente, o vetor *densidade de corrente de energia* do campo eletromagnético. O fluxo do vetor de Poynting sobre uma superfíce qualquer fornece a quantidade de energia eletromagnética que atravessa a superfície por unidade de tempo.

Observe que no limite em que Ω torna-se todo o espaço, englobando todas as cargas do universo, esperamos que os campos eletromagnéticos decaiam a suficientemente rápido para regiões afastadas, de modo que o fluxo do vetor de Poynting tenda a zero, produzindo

$$\frac{dU}{dt} = 0 \ , \tag{14.28}$$

a lei de conservação de energia do sistema total (cargas e campo eletromagnético).

Atividade 1

Obtenha o vetor de Poynting para a onda plana definida por (14.1) e (14.2).

Resposta comentada

Temos

$$\begin{aligned}\vec{S} &= \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} = \frac{1}{\mu_0}(E_0\hat{x})\times(\frac{E_0}{c}\hat{y})[\cos(kz-\omega t)]^2 \\ &= \hat{z}\frac{E_0^2}{\mu_0 c}[\cos(kz-\omega t)]^2 \ . \end{aligned} \tag{14.29}$$

Note agora, que fisicamente faz sentido considerarmos a *média* do vetor de Poynting, em vez de seu valor instantâneo: isso se deve ao fato de, tipicamente, a radiação incidente, como por exemplo luz visível, ter uma freqüência muito alta comparada às escalas de tempo das medidas macroscópicas, $\omega \sim 10^{15}s^{-1}$. Assim, devemos calcular a média da Expressão ([**?**], que é dada por

$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{1}{2\pi/\omega}\int_0^{2\pi/\omega}\hat{z}\frac{E_0^2}{\mu_0 c}[\cos(kz-\omega t)]^2 dt = \hat{z}\frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \ . \tag{14.30}$$

Lembrando ainda que $\mu_0\epsilon_0 = 1/c^2$, temos

$$\langle\vec{S}\rangle = \epsilon_0\frac{E_0^2}{2}\hat{z} \ . \tag{14.31}$$

Fim da atividade

Densidade de momento linear

Considere, agora, que Ω é o espaço todo. Como vereremos, essa hipótese simplificará a análise da lei de conservação do momento linear do sistema matéria-campo eletromagnético. O momento linear mecânico da distribuição de cargas é

$$\vec{P}_m = \int_\Omega d^3\vec{r}\rho_m\vec{v} \ . \tag{14.32}$$

A taxa de variação do momento linear mecânico no tempo é, então,

$$\frac{d\vec{P}_m}{dt} = \int_\Omega d^3\vec{r}\rho_m\frac{d\vec{v}}{dt} = \int_\Omega d^3\vec{r}\rho(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}) \ , \tag{14.33}$$

onde usamos, na segunda igualdade acima, a expressão para a força de origem eletromagnética por unidade de massa. Note que (14.33) não é zero em geral. Entretanto, como discutiremos a seguir, seremos capazes de definir uma quantidade vetorial, o momento linear do campo eletromagnético, $\vec{P}_{em}$, com o fim de restituir a lei de conservação do momento linear total. Isto é, teremos

$$\frac{d}{dt}(\vec{P}_m + \vec{P}_{em}) = 0 \; , \tag{14.34}$$

com

$$\vec{P}_{em} = \epsilon_0 \int_\Omega d^3\vec{r}\vec{E} \times \vec{B} \tag{14.35}$$

que, de acordo com (14.27), pode ser escrita em termos do vetor de Poynting da seguinte maneira:

$$\vec{P}_{em} = \epsilon_0\mu_0 \int_\Omega d^3\vec{r}\vec{S} \; . \tag{14.36}$$

Para chegar à Eq. (14.35), faremos duas substituições importantes no integrando de (14.33). Uma delas consiste em usar a lei de Gauss para escrever

$$\rho\vec{E} = \epsilon_0(\nabla \cdot \vec{E})\vec{E} \; . \tag{14.37}$$

A outra substituição consiste em usar a lei de Ampère-Maxwell, Eq. (14.18), para escrever

$$\begin{aligned} \rho\vec{v} \times \vec{B} &= \vec{J} \times \vec{B} = (\frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla} \times \vec{B} - \epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}) \times \vec{B} \\ &= \frac{1}{\mu_0}(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} - \epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} \times \vec{B}) + \epsilon_0\vec{E} \times \frac{\partial}{\partial t}\vec{B} \; . \end{aligned} \tag{14.38}$$

Usando a lei de Faraday, Eq. (14.21), para re-escrever o último termo na segunda linha em (14.38), achamos

$$\rho\vec{v} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0}(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} - \epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} \times \vec{B}) + \epsilon_0(\vec{\nabla} \times \vec{E}) \times \vec{E} \; . \tag{14.39}$$

Uma formulação alternativa da expressão (14.39) é encontrada fazendo uso da identidade (verifique!)

$$(\vec{\nabla} \times \vec{F}) \times \vec{F} = (\vec{F} \cdot \nabla)\vec{F} - \frac{1}{2}\vec{\nabla}\vec{F}^2 \; . \tag{14.40}$$

Obtemos, a partir de (14.39) e (14.40),

$$\begin{aligned} \rho\vec{v} \times \vec{B} &= \epsilon_0[(\vec{E} \cdot \vec{\nabla})\vec{E} - \frac{1}{2}\vec{\nabla}\vec{E}^2] \\ &+\frac{1}{\mu_o}[(\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} - \frac{1}{2}\vec{\nabla}\vec{B}^2] - \epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} \times \vec{B}) \; . \end{aligned} \tag{14.41}$$

Levando em conta que $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ e aplicando os resultados (14.37) e (14.41) na Expressão (14.33), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{P}_m}{dt} &= \int_\Omega d^3\vec{r}\{\epsilon_0[(\vec{E}\cdot\vec{\nabla})\vec{E} + (\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\vec{E}] \\ &+\frac{1}{\mu_0}[(\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{\nabla}\cdot\vec{B})\vec{B}] - \frac{1}{2}\vec{\nabla}(\epsilon_0\vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\vec{B}^2) \\ &-\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\times\vec{B})\} \ . \end{aligned} \tag{14.42}$$

Como Ω é o espaço todo, a integral do termo gradiente, acima, dá zero. O mesmo ocorre para cada uma das somas de termos entre colchetes. De fato, a soma destes termos pode ser representada como uma combinação de divergências. Por exemplo,

$$(\vec{E}\cdot\vec{\nabla})\vec{E} + (\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\vec{E} = \hat{x}\vec{\nabla}\cdot(E_x\vec{E}) + \hat{y}\vec{\nabla}\cdot(E_y\vec{E}) + \hat{z}\vec{\nabla}\cdot(E_z\vec{E}) \ . \tag{14.43}$$

Assim, segue-se, de (14.42), que

$$\frac{d\vec{P}_m}{dt} = -\epsilon_0\int_\Omega d^3\vec{r}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\times\vec{B}) = -\frac{d}{dt}\epsilon_0\int_\Omega d^3\vec{r}(\vec{E}\times\vec{B}) \ , \tag{14.44}$$

provando, finalmente, as relações (14.34) e (14.35). A Eq. (14.35) sugere que a *densidade de momento linear* (momento linear por unidade de volume) do campo eletromagético seja definida por

$$\vec{p}_{em} = \epsilon_0\mu_0\vec{S} \ . \tag{14.45}$$

Poderiamos nos perguntar que diferenças seriam encontradas se no nosso tratamento do momento linear, Ω fosse uma região do espaço de volume finito. Nesse caso, os termos que foram descartados em (14.42) iriam produzir contribuições superficiais. Não mostraremos isso aqui, pois foge aos nossos objetivos, mas o fato é que estes termos adicionais podem ser escritos como a integração de "tensões superficiais" definidas sobre a superfície $\partial\Omega$ que limita Ω.

Vale mencionar que a lei de conservação do momento angular também pode ser estendida ao contexto do sistema completo matéria-campo eletromagnético. Este resultado pode ser provado segundo linhas de argumentação inteiramente análogas àquelas já trilhadas aqui no estudo da lei de conservação da energia ou do momento linear.

Pressão de Radiação

Como vimos nas seções precedentes, o campo eletromagnético é capaz de transportar energia e momento. Uma onda eletromagnética que incide sobre um objeto qualquer provoca um "impacto" similar ao que ocorreria se houvesse uma colisão com outro objeto material massivo.

Suponha que a onda eletromagnética plana (14.1) incida normalmente sobre uma placa plana de área A, como mostrado na Figura 14.3. Suponha também que a onda seja completamente absorvida pela superfície. A taxa temporal de transferência de momento linear da onda à placa é, por definição, a força que a onda exerce sobre a placa; a onda incidente produz, portanto, pressão sobre a placa, chamada de "pressão de radiação".

Fig. 14.3: Onda eletromagnética plana que incide perpendicularmente sobre uma placa.

Para determinar a pressão de radiação, P_{rad}, é interessante definir o vetor "densidade de corrente de momento linear", $\vec{J}_p$. Como toda densidade de corrente, este vetor é o produto do vetor velocidade pela densidade da quantidade transportada no espaço. Como as ondas eletromagnéticas propagam-se com velocidade c no vácuo, podemos escrever, usando a Eq. (14.45), e levando em conta que $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$,

$$\vec{J}_p = c\epsilon_0\mu_0\vec{S} = \frac{1}{c}\vec{S} \ . \tag{14.46}$$

Dessa maneira, na propagação de campos eletromagnéticos, a quantidade de momento linear transportada, por unidade de tempo, através de um elemento de superfície $d\vec{A}$ será

$$\vec{J}_p \cdot d\vec{A} = \frac{1}{c}\vec{S} \cdot d\vec{A} \ . \tag{14.47}$$

Retornando ao problema da pressão de radiação exercida sobre a placa completamente absorvedora, causada pela onda plana (14.1), sua expressão é calculada imediatamente como

$$P_{rad} = \frac{1}{c}\frac{|\vec{S}|A}{A} = \frac{1}{\mu_0 c^2}E_0^2[\cos(kz - \omega t)]^2 \ . \tag{14.48}$$

Mais uma vez, faz sentido considerarmos a média temporal da pressão de radiação, pelas mesmas razões apresentadas na Atividade 1. Assim, temos

$$\langle P_{rad} \rangle = \frac{1}{2\mu_0 c^2} E_0^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 E_0^2 \tag{14.49}$$

Durante um certo intervalo de tempo Δt (contado a partir de $t = 0$, por exemplo, sem perda de generalidade), no qual a placa pouco se moveu, a quantidade de momento linear transferida à placa será

$$\langle \Delta P_z \rangle = A \int_0^{\Delta t} dt' \langle P_{rad} \rangle = A \frac{1}{2}\epsilon_0 E_0^2 \Delta t \ . \tag{14.50}$$

Por outro lado, a (média temporal da) energia recebida pela placa (convertida em energia cinética) será,

$$\langle \Delta E_c \rangle = \int_0^{\Delta t} dt' |\langle \vec{S} \rangle| A = A \frac{1}{2}\epsilon_0 E_0^2 \Delta t \ . \tag{14.51}$$

Para nossa grande satisfação, verificamos que as relações (14.50) e (14.51) estão em acordo com a Eq. (14.9), obtida para o problema da interação de uma onda eletromagnética plana com uma partícula carregada. Note, entretanto, que no caso da placa não fazemos nenhuma hipótese sobre sua constituição microscópica - a Relação (14.9) é, de fato, muito mais geral do que os modelos a partir dos quais ela pode ser deduzida!

Algumas vezes comenta-se que a pressão de radiação seria responsável pelo fato de as caudas dos cometas comportarem-se, em geral, como se fossem "repelidas" pelo sol. A radiação luminosa solar "empurraria" a cauda do cometa para fora. Entretanto, a pressão de radiação é muito tênue para produzir este fenômeno. O afastamento das caudas é, na realidade, devido à colisão de íons provenientes do sol, o "vento solar", com a poeira que é lançada ao espaço pelos cometas.

Uma aplicação muito interessante do efeito de pressão de radiação consiste nas chamadas "pinças óticas", de importância crescente em estudos biológicos *in vivo*. Pinças óticas são, essencialmente, regiões de laser focalizado que tem a propriedade de prender, como se fossem "armadilhas", objetos de massas diminutas, como micro-organismos, ou até mesmo moléculas de DNA. Em certos regimes de funcionamento, as pinças óticas operam inteiramente com base no fenômeno da pressão de radiação.

Atividade 2

Refaça o cálculo anterior da pressão de radiação para o caso em que a placa reflete totalmente a radiação incidente.

Resposta comentada

No caso de reflexão total, com incidência normal, o momento transferido à placa por unidade de tempo é o dobro do momento transferido por unidade de tempo no caso da placa totalmente absorvedora. Dessa maneira, a pressão de radiação também será duplicada:

$$\langle P_{rad} \rangle = 2 \times \frac{1}{2}\epsilon_0 E_0^2 = \epsilon_0 E_0^2 \; . \tag{14.52}$$

Fim da atividade

Atividades finais

1. A luz solar chega à superfície da terra com intensidade aproximada de $I_0 = 1.4$ Watts/m^2.

   (i) Estime a força que a luz solar exerce sobre um grão de poeira esférico de raio aproximadamente igual a $R = 0.1$ mm. Suponha que o grão seja totalmente absorvedor.

   (ii) Calcule, a partir do item anterior, a aceleração de um grão de massa $m = 1\mu$g, provocada pela pressão de radiação solar. Compare esta aceleração com a aceleração da gravidade.

2. Suponha que uma onda plana (14.1)-(14.2) incida com ângulo de incidência igual a $60°$ sobre uma placa totalmente refletora. Determine a pressão de radiação.

3. Um fio retilíneo infinito transporta corrente i. Este fio está conectado a um capacitor de placas circulares e paralelas de raio R, separadas por uma distância d. Veja a Figura 14.4.

   (i) Determine, usando argumentos usuais da eletrostática, a potência injetada no capacitor, no momento em que as cargas acumuladas em suas placas sejam $+q$ e $-q$.

   (ii) Obtenha a expressão encontrada no item anterior, a partir do fluxo do vetor de Poynting sobre a superfície cilíndrica limitada pelo capacitor.

Respostas comentadas

1. A intensidade solar I_0 corresponde ao módulo do vetor de Poynting.

Fig. 14.4: Um capacitor é inserido em um fio que transporta corrente i.

(i) A força exercida pela radiação sobre o grão de raio R será devida, grosso modo, à absorção em uma área da ordem de πR^2. Obtemos

$$F_{rad} = \frac{I_0}{c} \pi R^2 \simeq 1.4 \times 10^{-16} N \ . \tag{14.53}$$

(ii) A aceleração do grão, devida à radiação solar, será

$$a = \frac{F_{rad}}{m} \simeq 1.4 \times 10^{-7} m/s^2 \ , \tag{14.54}$$

isto é, cerca de 1.4×10^{-8} vezes menor do que a aceleração da gravidade.

2. Levando em conta que o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão, o momento transferido à placa por unidade de tempo será igual ao momento transferido por unidade de tempo no caso da incidência normal, multiplicado por um fator de $\cos(60°) = 1/2$. Revendo a Atividade 2 do texto, obtemos a pressão de radiação

$$P_{rad} = \frac{1}{\mu_0 c^2} E_0^2 [\cos(kz - \omega t)]^2 \ . \tag{14.55}$$

3. (i) A energia elétrica acumulada no capacitor (de capacitância C) é

$$U = \frac{q^2}{2C} \ , \tag{14.56}$$

onde $C = \epsilon_0 \pi R^2 / d$. A potência transferida ao capacitor é, portanto,

$$\frac{dU}{dt} = \frac{qi}{C} \ , \tag{14.57}$$

(ii) O campo elétrico entre as placas do capacitor é $E = q/\epsilon_0 \pi R^2$. O campo magnético produzido pela corrente de deslocamento, perpendicular ao campo elétrico, vale, também à distância R do eixo de simetria, $B = \mu_0 i / 2\pi R$. O vetor de Poynting à distância R do eixo de simetria do sistema é, portanto, em módulo

$$S = \frac{1}{\mu_0} EB = \frac{qi}{2\epsilon_0 \pi^2 R^3} \ . \tag{14.58}$$

O fluxo do vetor de Poynting (voltado para dentro do capacitor) sobre a superfície cilíndrica que limita o campo elétrico produzido pelo capacitor é, então,

$$S \times 2\pi R \times d = \frac{qid}{\epsilon_0 \pi R^2} = \frac{qi}{\epsilon_0 \pi R^2/d} = \frac{qi}{C} \; . \tag{14.59}$$

Verificamos, como tinha de ser, a correspondência exata entre (14.57) e (14.59).

Resumo

Campos eletromagnéticos possuem, em geral, energia e momento linear. Estas quantidades, historicamente introduzidas em um contexto puramente mecânico, não seriam conservadas no movimento de cargas no eletromagnetismo, se o próprio campo eletromagnético não transportasse energia e momento. As expressões para as densidades de energia e momento associadas ao campo eletromagnético são ambas proporcionais ao produto vetorial dos campos elétrico e magnético, tal como aparece na definição do "vetor de Poynting". A transferência de momento linear do campo de radiação à matéria é a origem do fenômeno conhecido com "pressão de radiação".