Condutores, Capacitores e Dielétricos

Metas

- Apresentar propriedades gerais do campo elétrico
- Apresentar as condições de contorno satisfeitas pelo campo elétrico
- Introduzir o conceito de capacitores
- Apresentar noções geris de materiais dielétricos

Objetivos

Depois de estudar esta aula, você deverá ser capaz de

- Descrever o campo elétrico na presença de condutores
- Calcular a capacitância de sistemas simples
- Calcular as densidades de carga ligada superficial e volumétrica em um meio dielétrico

Meios Materiais

Nas aulas passadas, estudamos o campo elétrico no vácuo, ou seja, na ausência de qualquer meio material. Esta é uma situação muito útil, porque, apesar de simples, é de utilidade prática. Agora que já possuímos um conhecimento matemático de como campos eletrostáticos se comportam no vácuo, através da lei de Gauss, que estudamos na Aula 4, e da lei de Faraday sem campo magnético, que estudamos na Aula 5, investigaremos o comportamento do campo elétrico em certos meios materiais.

O primeiro exemplo, de grande importância prática, é o de *condutores perfeitos*. Um condutor, como o próprio nome diz, é um meio material que tem a propriedade de conduzir cargas elétricas. Exemplos do dia-a-dia são metais como cobre, ferro, prata, ou uma solução de água com sal. Alguns destes meios, apesar de serem excelentes condutores, *não* são condutores perfeitos: há sempre alguma dissipação de energia ao conduzir corrente. O aquecimento de aparelhos elétricos e eletrônicos deixa isso claro.

Como você deve imaginar, muitos materiais não podem ser considerados, nem aproximadamente, condutores perfeitos, mas ainda assim é possível, e muito interessante, estudar as propriedades destes meios na presença de campos eletrostáticos. Nesta aula estudaremos certos meios materiais chamados *meios dielétricos*. Um meio dielétrico é um meio material neutro, sem cargas livres, mas que, quando sob o efeito de um campo elétrico, se *polariza*. Isso significa que se cria uma densidade de dipólos elétricos, que produzem, por sua vez um campo elétrico contrário ao campo externo. Alguns exemplos típicos são vidro, água e ar, ou seja, materiais muito comuns. Entender as propriedades destes meios é parte dos objetivos desta aula.

Passemos então ao estudo do campo elétrico em meios materiais. Para que a nossa apresentação seja mais precisa, devemos entender alguns aspectos matemáticos das equações que descrevem o campo elétrico estático.

Antes de prosseguir, atenção: esta é uma aula longa e com muitos conceitos importantes. Você deve dedicar duas semanas ao seu estudo.

Condutores Perfeitos

Um condutor perfeito é um material que possui uma quantidade tão grande de cargas livres, que podemos considerar ilimitada para todos fins práticos. Além disso, estas cargas podem se mover livremente pelo condutor, *porém* não podem "escapar" do condutor: existem outras interações, cuja natureza não nos interessa no momento, que mantem as cargas na superfície do condutor. Note que a interação que prende os elétrons ao condutor é de natureza elétrica, mas os átomos que formam o material estão sujeitos a outras interações, como mencionamos na Aula 4. Isso tem que ser assim porque, como vimos na Aula 4, o teorema de Earnshaw estabelece que não existem configurações de equilíbrio estático se a única interação entre as cargas for a interação elétrica.

Podemos aplicar o que aprendemos até agora sobre o campo elétrico para estudar como cargas se distribuem em um condutor. O primeiro resultado, que é um dos mais importantes do ponto de vista de aplicações, é o fato de que, em uma situação de equilíbrio eletrostático, o campo elétrico deve se anular em seu interior. Isso é verdade mesmo na presença de campos externos! A importância prática deste fenômeno está na *blindagem eletrostática*. Vejamos por que isso tem que ser assim.

Considere um condutor perfeito qualquer em equilíbrio eletrostático, ou seja, as cargas estão distribuídas de tal maneira que a força sobre elas é nula, e, além disso, se realizarmos um deslocamento infinitesimal de uma carga qualquer, as forças das outras cargas será de tal forma a fazer com que ela volte à sua posição original. Existem duas situações que devemos considerar: cargas que se encontram no interior do condutor e cargas que se encontram na superfície do condutor.

Para as cargas que se encontram no interior do condutor aplicamos o teorema de Earnshaw. A conclusão é simples e contundente: não existem cargas livres no interior do condutor! Note que esta conclusão é válida mesmo na presença de um campo elétrico externo, devido ao princípio da superposição. Assim já sabemos que no interior do condutor a densidade de carga será igual a zero, mas isso não significa que o campo elétrico seja zero.

Para as cargas na superfície do condutor o teorema de Earnshaw não pode ser aplicado, uma vez que existem forças que não permitem que as cargas escapem do condutor. O que podemos dizer, porém, é que a força elétrica de todas as outras cargas sobre um pequeno elemento de carga qualquer deve ser perpendicular à superfície. Pois se não fosse perpendicular, então existiria uma componente tangencial que faria com que este elemento de carga se movesse, e não estaríamos em uma situação de equilíbrio estático.

Assim chegamos a dois resultados, a densidade de carga ρ no interior do condutor é igual a zero, e o campo elétrico na superfície do condutor é perpendicular a ela. O que mais podemos dizer sobre o campo elétrico no interior do condutor? Para responder a esta pergunta, utilizaremos o fato de o campo elétrico ser conservativo, o que está formulado na equação $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$. Suponha, então, que o campo elétrico é diferente de zero no interior do condutor. Como o campo elétrico tem que sempre partir de cargas elétricas, e como a densidade de carga elétrica no interior do condutor é zero, se houver campo no interior do condutor, então ele deve partir de cargas na superfície e chegar em alguma outra carga na superfície, como mostra a Figura 6.1. Lembre que as linhas de campo do campo elétrico não podem ser fechadas, pois $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$. Podemos então traçar um circuito $\mathcal{C}$ que é formado por uma dessas linhas de campo e se fecha por uma linha na superfície do condutor, como mostra a Figura 6.2. A integral $\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{r}$ é diferente de zero, pois o pedaço pelo condutor se anula, dado que o campo

Fig. 6.1: Como deveriam ser as linhas de campo no interior de um condutor

Fig. 6.2: Circuito formado por um pedaço da linha de campo e um pedaço na superfície do condutor

elétrico é perpendicular à superfície, mas o pedaço no interior seria positivo, pois escolhemos o circuito tangenciando uma linha de campo! A conclusão a que chegamos é, então, que o campo elétrico se anula no interior de um condutor perfeito.

O argumento que acabamos de apresentar não é o argumento apresentado tradicionalmente nos livros de eletromagnetismo. No entanto, para que a sua formação fique completa, apresentaremos agora este outro argumento.

Como explicamos anteriormente, um condutor perfeito possui um número muito grande de cargas livres que podem se mover livremente pelo seu interior. Imagine então que um condutor perfeito está no vácuo e você começou a ligar um campo elétrico $\vec{E}$ lentamente. Os elétrons se moverão na direção *oposta* ao campo elétrico, pois tem carga negativa. Assim eles estarão "deixando" regiões com carga positiva, que são os núcleos dos átomos deste condutor. Isso criará um campo elétrico $\vec{E}'$ *oposto* ao campo elétrico que estamos aplicando, como mostra a figura 6.3. Assim, enquanto houver algum resquício de campo elétrico, as cargas continuarão a se mover de forma a contrabalançá-lo, e o processo de rerranjo só termina quando o campo no interior do condutor se anular. Este processo ocorre de forma extremamente rápida, e, para todos fins práticos, pode ser considerado instantâneo.

Chegamos, assim, à mesma conclusão que apresentamos antes, e que é de importância fundamental: o campo elétrico no interior de um condutor perfeito é nulo.

Agora que sabemos tudo sobre o campo elétrico e a densidade de carga no interior do condutor, ou seja $\vec{E} = 0$ e $\rho = 0$, o que podemos dizer sobre

Fig. 6.3: Situação simplificada na qual se vê o campo elétrico externo $\vec{E}$ e o campo $\vec{E}'$ criado pelas cargas do condutor

o campo elétrico e a densidade de carga na *superfície* do condutor? Infelizmente a resposta completa para esse problema depende da geometria específica do condutor, mas ainda assim há algo que podemos dizer, por meio de argumentos gerais e da lei de Gauss.

Note que como o campo elétrico no interior do condutor é zero, a lei de Gauss nos dize que a densidade de carga elétrica será zero no inteior do condutor: $\rho = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$. Portanto, a carga se acumulará na superfície do condutor. Como já mencionamos antes, há alguma coisa que as prende na superfície. Para onde pode apontar o campo elétrico? Como estamos em uma configuração de equilíbrio, o campo elétrico tem que ser normal à superfície, pois se não for, haverá uma componente tangencial que moverá as cargas, contrariando a hipótese de que estamos em uma situação de equilíbrio. Assim, em um ponto da superfície temos $\vec{E} = E\hat{n}$, onde $\hat{n}$ é o vetor normal à superfície naquele ponto. Isso mostra também que *a superfície de um condutor é uma equipotencial*. Para entender este resultado, basta lembrar que a diferença de potencial entre dois pontos é dada por uma integral de linha de $-\vec{E}$ que vai de um ponto ao outro. Se considerarmos dois pontos na superfície de um condutor e um caminho sobre a superfície do condutor, como o campo elétrico é sempre normal à superfície, o resultado da integral de linha será nulo, mostrando que os dois pontos tem o mesmo potencial. Esse é um resultado fundamenal sobre condutores perfeitos que iremos invocar frequentemente.

O que podemos dizer sobre a distribuição de carga na superffície do condutor? Mostraremos agora que, se a densidade de carga em um elemento de superfície é σ, então o campo elétrico é dado por $\vec{E} = \sigma/\epsilon_0 \hat{n}$, onde $\hat{n}$ é o vetor normal à superfície naquele ponto.

Para mostrarmos este resultado, considere um elemento de área na superfície do condutor, e aplique a lei de Gauss ao pequeno cilindro que passa por este elemento de área, como mostra a Figura 6.4. A lei de Gauss

Fig. 6.4: Pequeno cilindro que forma a superfície gaussiana.

nos diz que

$$\oint \vec{E} \cdot \hat{n} dA = EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \tag{6.1}$$

onde a primeira igualdade decorre do fato de somente a "tampa" superior do cilindro contribuir para o fluxo: na tampa inferior o campo é zero, e nas laterais o campo é perpendicular à normal da superfície. A segunda igualdade é meramente a aplicação da lei de Gauss: o fluxo do campo elétrico é dado pela carga no interior da superfície gaussiana dividida por ϵ_0. Assim concluímos da Equação 6.1 que $E = \sigma/\epsilon_0$, que é o que queríamos provar.

Apesar de termos uma descrição razoavelmente completa sobre a distribuição de carga e o campo elétrico em um condutor perfeito, é frustrante não possuir um método de cálculo simples que permita descrever a distribuição de carga na superfície de um condutor. Este é um problema que, com raras exceções, deve ser tratado de forma numérica.

Os casos que sabemos tratar são essencialmente esferas ou planos na proximidade de cargas elétricas, e, notavelmente, o caso do elipsóide. Mesmo o caso de duas esferas condutoras carregadas na proximidade uma da outra não possui uma solução analítica simples.

Propriedades do Campo Elétrico

A primeira pergunta que devemos nos fazer quando nos deparamos com um conjunto de equações diferenciais que descrevem um sistema físico é se elas tem uma solução única. Em particular, devemos saber quais são as condições iniciais, ou de contorno, dependendo da situação física específica, que devemos impor em nosso problema para que ele seja bem definido. Note que condições iniciais se referem às condições que devemos impor às nossas quatidades físicas em um certo instante inicial $t = 0$, como a posição no início de um movimento. Condições de contorno se referem às condições que devemos impor às nossas quantidades físicas em certas superfícies, como o valor do potencial em uma certa superfície.

Para entender a importância das condições iniciais, pense, por exemplo, no caso da segunda lei de Newton, $\vec{F} = m\vec{a}$, que descreve o movimento de uma partícula pontual de massa m sujeita à ação de uma força $\vec{F}$. Considere, por exemplo, que esta partícula esta sujeita à força gravitacional na superfície da Terra. Se você simplesmente soltá-la, ela irá cair em linha reta, em um movimento uniformemente acelerado. Se você jogar a partícula para cima, ela irá se mover por um certo tempo, parar e cair. Finalmente, se você arremessá-la com um certo ângulo, ela irá descrever uma parábola. Nos três casos o movimento da partícula satisfaz exatamente à mesma equação diferencial, que é a segunda lei de Newton, mas os movimentos tem soluções diferentes. O que acontece é que para podermos descrever o movimento da partícula não basta apenas conhecer a equação que ela obedece, mas também devemos saber qual a condição inicial ou condição de contorno que ela satisfaz. O mesmo é válido para as equações de Maxwell. No caso da eletrostática devemos saber quais são as condições de contorno que devemos impor de tal forma que o problema esteja bem definido matematicamente e que sejam condições razoáveis do ponto de vista físico, ou seja, o tipo de condição que você deve impor ao campo elétrico em uma situação realista. Passemos, então, ao estudo da unicidade das soluções das equações de Maxwell para o campo elétrico estático.

Como já sabemos, o campo elétrico estático satisfaz duas equações diferenciais parciais simples

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \qquad (6.2)$$

Para resolver um problema de eletrostática completamente precisamos resolver as Equações (6.2) sujeitas a certas *condições de contorno*, ou seja, devemos especificar algum dado sobre a configuração que estamos estudando, como por exemplo, o valor do potencial em uma superfície. Na verdade, esta acaba sendo uma das maneiras mais relevantes na prática, pois é exatamente isso que podemos fazer com um condutor: fixar o valor do potencial nele. Mas a pergunta que resta é: será que se especificarmos as condições de contorno para o campo elétrico, a solução das equações 6.2 é única? De forma mais geral, será que se conhecermos o potencial em alguns condutores, e a carga total de outros, será que a solução é única? A resposta é, felizmente, sim, e a seguir apresentaremos um argumento de por que o teorema é correto. Mas se você preferir pode passar para a seção seguinte: tudo que você deve se lembrar é que há um teorema que assegura que o problema matemático da unicidade das soluções das duas equações de Maxwell em 6.2, dado que conhecemos os potenciais em algumas superfícies e as cargas totais em outras.

O argumento é o seguinte. Suponha que existe mais de uma solução para o problema que estamos tratando, que chamaresmos de $\vec{E}_1$ e $\vec{E}_2$. Estes campos satisfazem as mesmas equações, e as mesmas condições de contorno, ou seja

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_1 = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad , \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E}_2 = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{E}_1 = 0 \quad , \quad \vec{\nabla}\times\vec{E}_1 = 0 \tag{6.3}$$

Além disso, dizer que um condutor $\mathcal{S}_i$ possui uma carga Q_i, significa, pela lei de Gauss, que

$$\oint_{\mathcal{S}_i} \vec{E}\cdot\hat{n}dA = \frac{Q_i}{\epsilon_0} \tag{6.4}$$

A cada um destes campos corresponde um potencial ϕ_i, com $i = 1, 2$. Nas superfícies em que o potencial é fixado temos que $\phi_1 = \phi_2$.

Considere agora o campo $\vec{E}_- = \vec{E}_1 - \vec{E}_2$. Este campo satisfaz a

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_- = 0 \quad , \quad \vec{\nabla}\times\vec{E}_- = 0 \tag{6.5}$$

e satisfaz à

$$\oint \vec{E}_-\cdot\hat{n}dA = 0 \tag{6.6}$$

nas superfícies em que a carga dada é fixada pelas condições de contorno.

Uma vez que $\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$, concluimos que o campo $\vec{E}$ pode ser escrito como o gradiente de alguma função $\phi = \phi_1 - \phi_2$. Em princípio poderíamos somar uma constante à ϕ, mas como queremos que no infinito espacial o potencial se anule, e como ϕ_1 e ϕ_2 se anulam no infinito, ϕ é de fato dada por $\phi = \phi_1 - \phi_2$.

A equação para a divergência de $\vec{E}$ implica em $\nabla^2\phi = 0$. Considere então a seguinte integral de volume

$$I = \int_{\mathcal{V}} \left|\left|\vec{\nabla}\phi\right|\right|^2 dV \tag{6.7}$$

na qual o volume $\mathcal{V}$ é grande o suficiente para incluir todas as superfícies de nosso sistema. Assim podemos considerar que ela "se extende ao infinito". Como I é a integral de uma função não-negativa, $\left|\left|\vec{\nabla}\phi\right|\right|^2 = \vec{\nabla}\phi\cdot\vec{\nabla}\phi$, esta integral é maior ou igual a zero, se anulando apenas no caso em que $\nabla\phi = 0$. Integrando por partes podemos escrevê-la como

$$I = \int_{\mathcal{V}} \left|\left|\vec{\nabla}\phi\right|\right|^2 dV = \int_{\mathcal{V}} \vec{\nabla}\cdot(\phi\vec{\nabla}\phi)dV - \int_{\mathcal{V}} \phi\nabla^2\phi dV = \oint_{\mathcal{V}} \nabla(\phi\vec{\nabla}\phi)dV \tag{6.8}$$

Aplicando o teorema de Gauss ao cálculo de I, temos

$$I = \int_{\mathcal{V}} \nabla(\phi\vec{\nabla}\phi)dV = \oint_{\mathcal{S}_\infty} \phi\vec{\nabla}\phi\cdot\hat{n}dA + \sum_i \oint_{\mathcal{S}_i} \phi\vec{\nabla}\phi\cdot\hat{n}dA \tag{6.9}$$

Temos que tratar estas integrais de superfície, uma delas é a “superfície no infinito”, que engloba nosso sitema, e as aoutras são as superfícies dos condutores.

Para a superfície no infinito podemos argumentar da seguinte maneira que a sua contribuição se anula: como para uma distribuição de cargas localizadas no espaço o potencial cai pelo menos como $1/r$, um termo $\phi\vec{\nabla}\phi$ se comportará, a distâncias muito grandes da distribuição de cargas, como uma função vetorial que cai pelo menos como $1/r^3$, pois o gradiente de $1/r$ é $-\hat{r}/r^2$. Mas a superfície de uma esfera que engloba o sistema é $4\pi r^2$, ou seja a integral nesta superfície se anula no limite $r \to \infty$. Mais explicitamente,

$$\left|\int_{\mathcal{S}_r} \phi\vec{\nabla}\phi \cdot n dA\right| < \int_{\mathcal{S}_r} \left|\phi\vec{\nabla}\phi\right| dA < \frac{C}{r^3}\int_{\mathcal{S}_r} dA = \frac{4\pi C}{r} \tag{6.10}$$

que se anula no limite em que $r \to \infty$.

Vejamos agora o que se passa nas superfícies dos condutores. Considere um condutor no qual fixamos o potencial. Como neste caso $\phi = 0$, pois $\phi = \phi_1 - \phi_2$, e ϕ_1 e ϕ_2 tem que ser iguais nesta superfície, uma vez que o potencial nela foi fixado, temos

$$\oint_{\mathcal{S}} \phi\vec{\nabla}\phi \cdot \hat{n} dA = 0 \tag{6.11}$$

Simples! E o caso em que a carga total é conhecida? Bem, inicialmente, note que, como estamos tratando de um condutor, quaisquer que sejam as soluções ϕ_1 e ϕ_2, elas são constantes na superfície de condutores. Assim, temos nestas superfícies

$$\oint_{\mathcal{S}} \phi\vec{\nabla}\phi \cdot \hat{n} dA = \phi \oint_{\mathcal{S}} \vec{\nabla}\phi \cdot \hat{n} dA \tag{6.12}$$

Como sabemos que $\vec{\nabla}\phi = -\vec{E}_-$, a integral em (6.12) se anula, como mostra a Equação (6.6). Assim, mostramos que todas as integrais de superfície se anulam, levando, então, à

$$\int_{\mathcal{V}} \left|\left|\vec{\nabla}\phi\right|\right|^2 dV = 0 \tag{6.13}$$

Mas como é possível que uma integral, cujo integrando é manifestamente não negativo, seja igual a zero? Devemos ter, necessariamente

$$\left|\left|\vec{\nabla}\phi\right|\right|^2 \Rightarrow \vec{\nabla}\phi = 0 \Rightarrow \phi = \text{constante}. \tag{6.14}$$

Essa constante só pode ser zero, pois ϕ se anula no infinito. Finalmente, chegamos a $\phi_1 = \phi_2$ em todo o espaço.

Não se preocupe se a prova acima não ficou inteiramente clara, ela é sutil e utiliza muitas idéias diferentes. O importante é entender o seguinte resultado: Se você encontrar um campo vetorial, não importa por qual método, se foi por meio de um palpite inspirado ou o resultado de um longo cálculo, que satisfaz às Equações (6.2) e também satisfaz às condições de contorno do problema que você está analisando, então essa é a solução do problema. Uma outra maneira mais prosaica de se dizer isso é afirmar que se um campo vetorial tem cara de solução e cheiro de solução então é *a* solução que estamos procurando.

No argumento que acabamos de apresentar, vimos que o uso de uma função ϕ que é basicamente a diferença entre dois potenciais, foi muito importante. Na verdade, frequentemente é mais conveniente usar o potencial elétrico do que o campo elétrico, por uma razão muito simples: se conhecemos o potencial elétrico podemos obter o campo elétrico por meio do cálculo do gradiente da função ϕ. Como é mais fácil tratar de *uma* função escalar em vez de *três* componentes de um campo vetorial, fica clara a simplificação que isso nos trás.

Condições de contorno: interfaces

Quando dois meios materiais distintos estão em contacto, devemos saber como estão relacionadas as componentes do campo elétrico de cada lado. Considere dois meios distintos, e suponha que na interface destes dois meios há uma densidade de carga superficial σ que pode depender da posição. De um lado temos o campo elétrico $\vec{E}_1$ e do outro o campo $\vec{E}_2$. Considere um pequeno cilindro de área ΔA, normal à interface, de altura ϵ, como mostra a figura 6.5 e apliquemos a lei de Gauss à ele.

Fig. 6.5: Pequeno cilindro perpendicular à interface, que forma a superfície gaussiana.

Note que ΔA e ϵ são infinitesimais, mas faremos com que $\epsilon \to 0$ primeiro. A conseqüência é que o fluxo pela lateral do cilindro também se anulará neste limite, pois a área da lateral se anula. O que sobre é apenas o fluxo pela tampa de cima e pela de baixo, que deve ser proporcional à carga no interior do cilindro, ou seja

$$\vec{E}_1 \cdot \hat{n}_1 \Delta A + \vec{E}_2 \cdot \hat{n}_2 \Delta A = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \Delta A \tag{6.15}$$

Como $\hat{n}_1 = -\hat{n}_2$, temos

$$(\vec{E}_1)_\perp - (\vec{E}_2)_\perp = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \tag{6.16}$$

Onde utilizamos o subscrito $\perp$ para indicar a componente normal do campo elétrico. Note que não incluimos a contribuição das cargas volumétricas. Isso se deve ao fato de o volume do cilindro ser $\Delta A \epsilon$, que se anula quando $\epsilon \to 0$. A condição (6.16)nos diz que a componente normal do campo elétrico é discontínua, e esta discontinuidade é proporcional à carga superficial na interface.

De forma semelhante, considerando um pequeno circuito de lados ΔL e ϵ, como mostra a Figura 6.6, podemos calcular a circulação do campo elétrico por este circuito. Mais uma vez, faremos $\epsilon \to 0$. antes de $\Delta L \to 0$. Isso

Fig. 6.6: Pequeno circuito normal à superfície

significa que a circulação pelos trechos de comprimento ϵ se anulam. Usando a equação $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$, obtemos

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = \vec{E}_1 \cdot \hat{t}_1 \Delta L + \vec{E}_2 \cdot \hat{t}_2 \Delta L = 0 \tag{6.17}$$

Como $\hat{t}_1 = -\hat{t}_2$, esta equação implica em

$$\vec{E}_1 \cdot \hat{t} - \vec{E}_2 \cdot \hat{t} = 0 \tag{6.18}$$

O vetor $\hat{t}$ é paralelo à interface, mas sua direção é arbitrária. Portanto

$$(\vec{E}_1)_\parallel - (\vec{E}_2)_\parallel = 0 \tag{6.19}$$

onde o subscrito $\parallel$ indica a componente do campo elétrico paralela à interface. Essa condição nos diz que a componente do campo elétrico tangencial a uma interface é contínua.

Vale a pena listar estas duas importantes condições de contorno para o campo elétrico

- A componente normal do campo elétrico é disconontínua em uma interface, e a discontinuidade é igual à σ/ϵ_0
- A componente tangencial do campo elétrico é contínua em uma interface.

Podemos aproveitar e escrever as condições de contorno para o potencial em uma interface.

Atividade 1

Encontre as condições de contorno satisfeitas pelo potencial em uma interface.

Resposta:Como sabemos que o campo elétrico é dado por $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$, usando 6.16, temos

$$-(\vec{\nabla}\phi_1)_\perp + (\vec{\nabla}\phi_2)_\perp = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \tag{6.20}$$

onde os subscritos 1 e 2 indicam os lados da interface.

Além disso, temos também, usando 6.19

$$(\vec{\nabla}\phi_1)_\parallel - (\vec{\nabla}\phi_2)_\parallel = 0 \tag{6.21}$$

Note que o potencial elétrico é contínuo ao cruzarmos uma interface: a diferença de potencial entre dois pontos próximos é dada por $\phi(\vec{r} + d\vec{r}) - \phi(\vec{r}) = \vec{\nabla}\phi \cdot d\vec{r} = -\vec{E} \cdot d\vec{r}$. Como o campo elétrico é finito, ao fazermos $d\vec{r} \to 0$, temos que $\phi_1 - \phi_2 = 0$ neste limite.

Capacitores

Um capacitor consiste de dois condutores arbitrário, um com carga $+Q$ e outro com carga $-Q$. Em geral é muito difícil calcular o campo elétrico em todo o espaço para uma situação tão geral, mas mesmo assim podemos extrair várias conclusões bastante gerais e úteis.

Considere, então, dois condutores, $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$, com cargas $+Q$ e $-Q$, respectivamente, como mostra a Figura 6.7. Como são dois condutores perfeitos, sabemos que a superfície de cada um deles é uma equipotencial, que denominaremos V_1 e V_2. A diferença de potencial entre esses dois condutores é calculado a partir de

$$-\int_{\mathcal{C}_{a\to b}} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{\mathcal{C}_{a\to b}} \vec{\nabla}V \cdot d\vec{r} \tag{6.22}$$

onde $\mathcal{C}_{a\to b}$ é um caminho qualquer que vai de um ponto a em $\mathcal{C}_2$ até um ponto b em $\mathcal{C}_1$. Podemos escolher um caminho qualquer porque é a integral

Fig. 6.7: Dois condutores arbitrários, com cargas $\pm Q$, formam um capacitor. São mostradas algumas linhas de cmapo.

de linha de um gradiente, e os pontos a e b podem ser arbitrários, desde que nas superfícies de $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$, pois estas superfícies são equipotenciais. Assim, o resultado de 6.22 é $V(b) - V(a) = \Delta V$.

Investiguemos agora qual é a relação entre ΔV e Q. O que será que acontece se, por exemplo, dobrarmos a carga? Para entender o que se passa, utilizaremos o princípio da superposição e a unicidade das soluções das equações da eletrostática. Considere, então, uma certa configuração, na qual um condutor possui carga Q e o outro $-Q$, que criam um campo elétrico dado por $\vec{E}(\vec{r})$, que, em geral, depende da posição. Se superpusermos dois sistemas idênticos, a carga em cada condutor será $2Q$ e $-2Q$, e o campo elétrico será $2\vec{E}$. Mas se o campo duplicou, a diferença de potencial também duplicará, como mostra a Equação (6.22). Assim, neste caso, em que duplicamos a carga, vemos que a diferença de potencial é duplicada, e portanto a razão

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \tag{6.23}$$

permanece inalterada: tanto o numerador quanto o denominador são multiplicados por 2. Usando o princípio da superposição, vemos que se triplicarmos a carga em cada condutor, a diferença de potencial triplica, se quadruplicarmos a carga, quadruplica a diferença de potencial, e assim por diante. Imagine, então, que Q é um valor pequeno. Para um valor Q_0 qualquer, podemos achar um número inteiro n, mesmo que muito grande, que aproximará Q_0 por nQ. Isso tem que ser assim por que se considerarmos a seqüência $Q, 2Q, 3Q, \ldots$, para algum valor de nQ os termos serão maiores do que Q_0. O valor de n que buscamos é o maior valor tal que $nQ < Q_0$. Como, por construção $(n+1)Q > Q_0$, o erro que estamos cometendo ao aproximar Q_0 por nQ é, no máximo, igual à Q, que estamos supondo que é muito pequeno. Assim vemos que a razão $C = Q/\Delta V$ é constante. Essa razão é chamada de capacitância. Note que a capacitância é uma quantidade puramente geométrica, apesar de termos definido de uma forma que, aparentemente, depende da carga que colocamos em cada capacitor.

Atividade 2

Calcule a capacitância de um sistema de placas paralelas, de área A separados por uma distância d muito pequena.

Resposta:Suponha que uma placa tem carga Q e a outra $-Q$. Como sabemos que as placas estão muito próximas, podemos supor que fora delas o campo elétrico é nulo, pois uma anula o efeito da outra. Entre as duas placas, um ponto "vê" dois planos infinitos, um com densidade de carga superficial $\sigma_1 = Q/A$ e o outro com densidade de carga superficial $\sigma_2 = -Q/A$. Assim, como sabemos que o campo elétrico produzido por um plano infinito uniformemente carregado é dado por

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{n} \tag{6.24}$$

onde $\hat{n}$ é a normal ao plano. Como temos dois planos o campo total entre os dois será dado por

$$\vec{E}_T = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{n} + \frac{-\sigma}{2\epsilon_0}(-\hat{n}) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{n} \tag{6.25}$$

A diferença de potencial é dada por

$$\Delta V = \int \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{n} \cdot d\vec{r} = \frac{\sigma d}{\epsilon_0} = \frac{Qd}{A\epsilon_0} \tag{6.26}$$

A definição de capacitância nos dá

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{A\epsilon_0}{d} \tag{6.27}$$

Fisicamente a capacitância nos dá uma idéia de como o sistema responde ao acréscimo de carga. Um sistema com uma capacitância alta cria uma diferença de potencial baixa para a carga que é adicionada. Já em um sistema com uma capacitância baixa se cria uma diferença de potencial alta para a carga que é adicionada. A energia armazenada em um capacitor é dada por $U = Q^2/2C$, como você verificará nas atividades finais.

O Método das Imagens

Apresentaremos agora um método de solução que é útil em um número limitado de problemas, mas devido à sua elegância e importância, vale a pena ser estudado. O método será apresentado por meio de um exemplo. Considere um plano condutor aterrado e uma carga q a uma distância D deste plano. Suponha que o plano se encontra em $x = 0$.

Dizer que o plano está aterrado significa que ele está conectado a um sistema que possui uma quantidade de carga enorme e cujo potencial elétrico é estabelecido como sendo zero. É por isso que em alguns aparelhos se diz que há um *fio terra*: é um fio que conecta o aparelho à Terra. Como a Terra tem uma quantidade enorme de carga elétrica, ela pode dar ou receber elétrons praticamente sem alterar o seu potencial elétrico. E como sabemos que a superfície de um condutor é uma equipotencial, se a Terra está a potencial elétrico zero, então o aparelho também estará a potencial elétrico zero.

O problema que queremos resolver é: qual é o campo elétrico em todo espaço? Antes de resolvermos este problema, procuremos entendê-lo do ponto de vista intuitivo. Suponha que a carga q é positiva. Isso significa que ela atrairá cargas negativas da Terra para o plano até se atingir uma situação de equilíbrio. A pergunta que temos que responder é, qual será o campo elétrico gerado por essas cargas no plano mais a carga elétrica orginal, em todo o espaço?

É mais fácil resolver para o potencial elétrico do que para o campo, que pode ser obtido no final calculando o gradiente do potencial. Como o plano está aterrado, sabemos que o potencial elétrico nele é nulo. Existe uma outra situação em eletrostática na qual um plano tem potencial nulo: considere duas cargas elétricas, $+Q$ e $-Q$, separadas por uma distância $2D$. O plano que bisseca a linha que une essas duas cargas tem potencial nulo. Esta situação parece não ter nada a ver com o problema que estamos procurando resolver, mas veja bem: considere a região que está de um dos lados deste plano que bisseca a linha que une as duas cargas. Qual é a equação que o potencial satisfaz na região $x > 0$? A equação é $\nabla^2\phi = -\rho/\epsilon_0$, onde ρ é a densidade de carga associada a uma carga pontual, apenas, cuja expressão matemática não importa neste caso. E qual é a condição de contorno que este potencial satisfaz sobre o plano? O potencial satisfaz à $\phi(0, y, z) = 0$. Mas esta equação e condição de contorno são *exatamente* as mesmas que o potencial satisfaz no caso de uma carga pontual na presença de um plano infinito aterrado. Assim, pela unicidade da solução os dois problemas tem exatamente a mesma solução. Podemos então escrever a solução para o potencial elétrico na região $x > 0$:

$$\phi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0((x-D)^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0((x+D)^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \tag{6.28}$$

este argumento nos mostra o seguinte. Se você se encontra na região $x > 0$ não há como saber se o potencial descrito pela Equação (6.28) representa o potencial de uma carga q em $(D, 0, 0)$ e uma carga $-q$ em $(-D, 0, 0)$, *ou* o potencial de uma carga q em $(D, 0, 0)$ e um plano aterrado em $x = 0$. Os potenciais são exatamente iguais. Agora, se você atravessar a região $x = 0$ notará uma diferença. No primeiro caso o potencial será não nulo, é a superposição do potencial de duas cargas. Já no segundo caso, uma carga e um plano aterrado o potencial será igual a zero. Para entender isso, use, como sempre, a equação satisfeita pelo potencial e as condições de contorno. Na região $x < 0$ não há carga elétrica, e, assim, temos $\nabla^2\phi = 0$. A condição de contorno em $x = 0$ é dada por $\phi(0, y, z) = 0$. Você consegue pensar em uma solução desta equação? Qualquer uma? Bem, uma muito simples é $\phi = 0$ para $x < 0$. Esta solução satisfaz à $\nabla^2\phi = 0$ e à $\phi(0, y, z) = 0$. Portanto, pela unicidade das soluções, esta é *a* solução.

O nome "método das imagens" é justificado por esta solução. Para quem está em $x > 0$ tudo se passa como se hovesse uma imagem do outro lado do plano, com o valor oposto da carga

Como você, esse método é muito elegante, achamos a solução de um problema razoavelmente complicado sem fazer nenhum cálculo, praticamente. Infelizmente o número de situações no qual podemos aplicá-lo é limitado. Nos exercícios no final da aula você verá algumas destas aplicações.

Atividade 3

Considere duas cargas, q_1 e q_2 situadas na região $x > 0$, em (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2), respectivamente, e um plano condutor aterrado em $x = 0$. Qual é o potencial no espaço todo?

Resposta:Da mesma maneira que vimos antes, na região $x < 0$ o potencial será igual a zero. Na região $x > 0$ o potencial será dado por uma configuração de cargas dada por q_1 e q_2 em (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2), respectivamente, e $-q_1$ e $-q_2$ em $(-x_1, y_1, z_1)$ e $(-x_2, y_2, z_2)$, respectivamente.

Meios Dielétricos

Como você viu, uma grande parte das substâncias que existem na natureza podem ser divididas em duas classes, os condutores e o isolantes, também chamados de dielétricos. Nesta aula já estudamos algumas das principais propriedades dos condutores, mas vale lembrar que a característica principal de um condutor é a de possuir um número muito grande de cargas que podem se mover livremente por ele, não estando presas a nenhum átomo específico. Já no caso de um isolante as coisas não são bem assim, e os elétrons estão ligados a átomos específicos. Devemos agora estudar como um meio dielétrico se comporta na presença de um campo elétrico externo.

Consideremos então, uma situação idealizada muito simples: um único átomo, constituído de uma distribuição esférica de raio R, e carga total negativa $-Q$ carga, e uma carga positiva Q, localizada no centro desta esfera. Suponha agora que este átomo se encontra na presença de um campo elétrico fraco $\vec{E}$. O que acontecerá? Qualitativamente sabemos que o núcleo será deslocado no mesmo sentido que o campo elétrico, ao passo que as cargas negativas serão deslocadas no sentido oposto. É importante agora que consideremos que esse campo elétrico não é muito forte para que possamos considerar que a distribuição de carga negativa continua sendo aproximadamente esférica. Assim surgirá uma força de atração entre o núcleo positivo e a nuvem negativa.

Usando argumentos de simetria e a lei de Gauss podemos calcular o campo elétrico da distribuição de carga negativa, a uma distância d do centro da esfera. Se o campo elétrico é dado por $\vec{E}(r) = E(r)\hat{r}$, e a densidade de carga elétrica é $-Q/(4\pi R^3/3)$, a lei de Gauss nos dá

$$E(d)4\pi d^2 = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3/3}\frac{4\pi d^3}{3} \Rightarrow E(d) = -\frac{Q}{\epsilon_0}\frac{d}{R^3} \tag{6.29}$$

A Figura ?? mostra o átomo na ausência e na presença de campo elétrico. A partir da Figura ??, concluímos que a situação de equilíbrio

Fig. 6.8: Esfera uniformemente carregada, com carga total $-Q$, e uma carga $+Q$ no centro, na ausência e presença de um campo elétrico externo.

ocorrerá quando

$$QE = \frac{Q}{\epsilon_0}\frac{d}{R^3} \Rightarrow d = \epsilon_0 E R^3 \tag{6.30}$$

O lado esquerdo representa a força que o campo externo faz sobre o núcleo, e o lado direito a força que a distribuição de carga negativa faz sobre o núcleo.

Agora, sabemos que uma distribuição esférica de carga e comporta, fora do raio da distribuição, como uma carga no centro da distribuição. Assim temos duas cargas opostas, $+Q$ e $-Q$ separadas por uma certa distância d. Assim para um observador externo tudo se passará como se ele estivesse na presença de uma carga $+Q$ e uma carga $-Q$ separadas por uma distância d. Ora, isso é, exatamente, o que definimos como um dipólo elétrico! A conclusão é que um campo elétrico externo pode deformar a distribuição de carga de tal forma a criar dipólos elétricos.

Apesar de este modelo para o surgimento de dipólos em um meio material ser muito simples, o resultado que obtemos a partir dele é razoavelmente próximo do que se mede experimentalmente, como mostraremos um pouco mais adiante.

Podemos agora introduzir o vetor de polarização, $\vec{P}$, que é, essencialmente, o número de dipólos elétricos por unidade de volume, ou seja, a densidade de dipólos. Você pode estar um pouco surpreso em encontrar uma densidade que é um vetor, ao contrário de outras densidades mais familiares, como a densidade de massa ou densidade de carga, que são escalares. Isso se deve ao fato de que um dipólo elétrico é caracterizado não apenas pelo seu valor, mas devemos dar uma orientação e sentido a ele, pois é uma quantidade vetorial. Assim, para calcular a densidade de dipólos elétricos ao redor de um certo ponto, basta considerar um pequeno elemento de volume ΔV, e somar os momentos de dipólos que se encontram neste volume, que fornece $\Delta\vec{p}$. A polarização é dada por

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta V} \tag{6.31}$$

Nas atividades finais você mostrará que o nosso modelo do "átomo esférico" prevê que, se o número de átomos por unidade de volume for ρ, então a polarização é dada por

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\rho \Delta V \epsilon_0 Q d R^3}{\Delta V} \vec{E} = \rho \epsilon_0 Q d R^3 \vec{E} = \alpha \vec{E} \tag{6.32}$$

onde $\alpha = \rho\epsilon_0 Q d R^3$. Existe, portanto, uma relação linear entre a polarização e o campo elétrico externo, e a constante α é chamada de *constante dielétrica* de um certo meio, que se escreve em geral como

$$\vec{P} = \alpha \vec{E}. \tag{6.33}$$

Acabamos de ver que um campo elétrico pode deformar a distribuição de carga de tal modo a gerar um momento de dipólo elétrico na mesma direção que o campo elétrico. Em situações mais realistas, porém, podem acontecer coisas surpreendentes, como por exemplo, um campo elétrico na direção x criar um momento de dipólo elétrico na direção y! Assim, a relação de linearidade entre polarização e campo elétrico passa a ser algo da forma

$$P_i = \alpha_{ij} E_j \tag{6.34}$$

onde P_i e E_i são as componentes da polarização e do campo elétrico, e α_{ij} é o *tensor de polarização* do meio. Apesar de sua importância, nos limitaremos a situações na qual a relação entre a polarização e o campo elétrico é da forma 6.33.

Há, porém, uma outra maneira pela qual pode surgir uma polarização em um meio. Em vez de o campo elétrico deformar as distribuições de carga, pode ser que já existam dipólos elétricos em um meio, que quando na presença de um campo externo tendem a se alinhar com o campo. Você pode se perguntar por que é necessário o campo externo nesse caso, afinal, não seria possível que, mesmo na ausência de um campo, já exista uma polarização? O que acontece é que esses dipólos microscópicos não estão alinhados, eles apontam para direções aleatórias, e assim, quando somamos os momentos de dipólo em um pequeno elemento de volume, a soma total se anula. Na presença de um campo externo, porém, esses dipólos tendem a se alinhar com o campo elétrico, produzindo, assim, uma densidade de dipólos elétricos por unidade de volume, o que gera uma polarização.

Façamos esssa análise de uma forma um pouco mais quantitativa. Considere um dipólo elétrico $\vec{p}$ na presença de um campo elétrico. Qual é a força e o torque que atuam neste dipólo?

Para responder a essas perguntas, consideremos o dipólo como sendo formado por cargas $\pm q$ separadas por uma distância d, tal que $qd = |\vec{p}|$. Na presença de um campo elétrico uniforme, a força que atua em cada uma das cargas é

$$\vec{F}_{\pm} = \pm q \vec{E} \tag{6.35}$$

Portanto a força total $\vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- = 0$. E o torque? como a força total é nula, podemos calcular o torque a partir de qualquer ponto, não dependerá da origem. Escolhendo o ponto médio entre as duas cargas, como mostra a Figura 6.9, temos

$$\tau_{\pm} = \pm q(\pm \frac{1}{2}\vec{d}) \times \vec{E} \tag{6.36}$$

O torque total, é, portanto $\tau = \tau_+ + \tau_- = q\vec{d} \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}$. Esta fórmula nos mostra que se $\vec{p}$ é paralelo a $\vec{E}$ o torque é nulo. Além disso, este torque tende a girar o dipólo para deixá-lo paralelo ao campo.

Fig. 6.9: Torque em um dipólo elétrico.

A conclusão é que um meio material sempre "responde" a um campo elétrico de forma a criar uma densidade de dipólos elétricos. Agora que sabemos isso, devemos nos perguntar: qual é o efeito do campo gerado por esses dipólos? A resposta a essa pergunta é o nosso próximo tópico.

Campo elétrico no interior de um meio material

Suponhamos agora que a o vetor de polarização em um certo meio material é dado, ou seja, conhecemos $\vec{P}$. Note que esse vetor pode depender, e em geral depende, da posição. Como $\vec{P}$ é a densidade de dipólos elétricos, podemos considerar que existem pequenos dipólos formados por cargas $\pm q$ separadas por uma distância d.

Considere um pequeno cilindro, de comprimento ΔL e seção reta de área A, paralelo ao vetor de polarização, como mostra a Figura **??**. A partir

Fig. 6.10: Pequeno cilindro com eixo paralelo à polarização.

da definição de polarização, sabemos que o momento de dipólo deste cilindro é dado por

$$\vec{\Delta} p = \vec{P} A \Delta L \tag{6.37}$$

Mas note o seguinte, como a Figura **??** deixa evidente, no interior do cilindro, as cargas se cancelam, e sobram apenas as cargas nas "tampas" do cilindro. Se a densidade nelas for $\pm\sigma$, temos que o momento de dipólo deste cilindro é $\delta\vec{p} = \sigma A \Delta L \hat{t}$, onde $\hat{t}$ é um vetor unitário paralelo a $\vec{P}$. Assim concluimos que

$$\sigma A \Delta L \hat{t} = \vec{P} A \Delta L \Rightarrow \sigma = P \tag{6.38}$$

O resultado é interessante, mas podemos melhorá-lo um pouco. Considere agora que uma das tampas está inclinada de um ângulo θ, como mostra a Figura **??**.

Fig. 6.11: Pequeno cilindro com eixo paralelo à polarização, mas com uma das tampas inclinadas.

A tampa de baixo "corta" um certo número de dipólos, dando origem a uma carga total $\sigma A = PA$. A tampa de cima claramente corta o mesmo número de dipólos, como a Figura 6.11 deixa claro. Mas a área desta tampa inclinada é $A/\cos\theta$. Portanto a quantidade de carga superficial *é a mesma que antes*. Mas como aumentamos a área, a densidade de carga muda, e é dada por

$$\sigma_b = \frac{PA}{A/\cos\theta} = P\cos\theta \tag{6.39}$$

Essa expressão para a densidade de carga superficial pode ser escrita de forma mais compacta como

$$\vec{P} \cdot \hat{n} = \sigma_b \tag{6.40}$$

Agora que temos uma relação entre o vetor polarização $\vec{P}$ e a densidade de carga ligada superficial, devemos procurar uma relação entre $\vec{P}$ e a densidade de carga *volumétrica*. Para isso, usaremos o teorema de Gauss.

Considere uma pequena esfera $\mathcal{E}$ de raio R ao redor de um ponto $\vec{r}$ qualquer. O teorema de Gauss nos diz que

$$\int_{\mathcal{E}} \vec{\nabla} \cdot \vec{P} dV = \int_{\mathcal{S}} \vec{P} \cdot \hat{n} dA \tag{6.41}$$

Se a esfera for muito pequena, então o lado esquerdo pode ser escrito de forma aproximada como

$$\int_{\mathcal{E}} \vec{\nabla} \cdot \vec{P} dV \approx \vec{\nabla} \cdot \vec{P} \times \frac{4\pi R^3}{3} \tag{6.42}$$

Para o lado direito, como já sabemos que $\vec{P} \cdot \vec{n} = \sigma_b$, temos que

$$\int_{\mathcal{S}} \vec{P} \cdot \hat{n} dA = \int_{\mathcal{S}} \sigma_b dA = Q_b \tag{6.43}$$

Nesta equação Q_b representa a carga total ligada na superfície da esfera. Note agora que a carga *total* na esfera, deve ser zero, pois cada dipólo individual é neutro. Portanto a carga que está no interior da esfera tem que ser igual à $-Q_b$. Escrevendo $-Q_b = \rho_b \Delta V$, onde ρ_b é a densidade de carga ligada volumétrica. Assim, temos

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \Delta V = Q_b = -\rho_b \Delta V \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\rho_b \tag{6.44}$$

Temos agora a relação que faltava. A divergência do vetor polarização é igual a menos a densidade de carga ligada volumétrica.

Você pode, e deve, estar se perguntando se essa carga ligada é algo fictício, de caráter matemático apenas, ou se ela representa carga real, como as cargas elétricas que temos estudado até agora. A resposta é *sim*, essas cargas ligadas são tão carga elétrica quanto qualquer carga elétrica. Mas então, por que diferenciar assim e chamar essas cargas de cargas ligadas, introduzir densidades de carga superficial e volumétrica e assim por diante? A razão para isso é que não estamos tratando de um sistema qualquer, mas de um sistema que possui uma distribuição de dipólos. Portanto devemos usar este fato desde o início de nossos cálculos, e não prosseguir como se fossem cargas totalmente independentes e, só no fim de nossos cálculos, percebermos que várias simplificações ocorreram porque, afinal de contas, estavamos tratando de um sistema particular, no qual existem dipólos elétricos distribuídos. Se você quiser uma boa analogia para pensar sobre isso, considere uma partícula de massa m em um potencial independente do tempo. Esse sistema conserva a energia. Portanto é uma boa idéia usar essa informação desde o início de seus cálculos, e não redescobri-la depois de muito esforço.

Qual é a simplificação que a introdução de cargas ligadas introduz? Considere uma distribuição de cargas descrita pela densidade volumétrica ρ. Podemos separar essa densidade de carga em duas partes, $\rho = \rho_f + \rho_b$, onde ρ_f é a densidade de carga livre (o subscrito f representa *free* que é "livre" em inglês), ou seja, a carga que não está presa a dipólos, e que suporemos que pode se mover livremente pelo material, e ρ_b é a densidade de carga ligada, associada aos dipólos. Usando esta separação, podemos escrever a lei de Gauss para o campo elétrico

$$\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho = \rho_f + \rho_b = \rho_f - \vec{\nabla} \cdot \vec{P} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_f \ . \tag{6.45}$$

A equação anterior nos sugere a introdução de um campo vetorial $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, cuja divergência é igual à densidade de carga livre! Isto nos permitirá estudar problemas em meios dielétricos muito mais facilmente. Esse campo vetorial é tão importante que merece um nome, é o chamado *vetor deslocamento*.

Uma vez que definimos o vetor de deslocamento $\vec{D}$, devemos agora encontrar as condições de contorno que ele satisfaz, de forma análoga ao que fizemos para o campo elétrico. Utilizando a Equação (6.16), vemos que, como $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f$, então

$$(\vec{D}_1)_\perp - (\vec{D}_2)_\perp = \sigma_f \tag{6.46}$$

para a componente perpendicular. Note que aqui lançamos mão de uma analogia para poder fazer um atalho em nossos cálculos. Como já sabemos que $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$ leva à $(\vec{E}_1)_\perp - (\vec{E}_2)_\perp = \sigma$, então, $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f$ tem que levar à Equação (6.46), pois, matematicamente, só mudamos os símbolos ao passar de uma equação para a outra.

Podemos também obter a equação para a componente paralela em uma interface. Tomando a Equação (6.19) como ponto de partida, temos que

$$(\vec{D}_1)_\parallel - (\vec{D}_2)_\parallel = (\vec{P}_1)_\parallel - (\vec{P}_2)_\parallel \tag{6.47}$$

Note a diferença entre o campo elétrico e o vetor desolcamento. Ao passo que em (6.19) o lado direito da equação é zero, em (6.47) o lado direito é não nulo.

Você poderia ser levado a pensar que, em um meio material, o vetor $\vec{D}$ faz o mesmo papel que o vetor $\vec{E}$ no vácuo. Isso não é bem verdade, pois, como sabemos, o campo elétrico é conservativo, e isso está manifesto na equação $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$. O campo $\vec{D}$ *não* satisfaz à $\vec{\nabla} \times \vec{D} = 0$, pois

$$\vec{\nabla} \times \vec{D} = \vec{\nabla} \times (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \vec{\nabla} \times \vec{P} = ? \tag{6.48}$$

Simplesmente não sabemos o que pode ser o $\vec{\nabla} \times \vec{P}$, e portanto não podemos dizer que o campo $\vec{D}$ é conservativo. Na verdade, podemos apresentar um exemplo simples no qual $\vec{\nabla} \times \vec{P}$. Considere um meio dieletrico qualquer. Na interface dele temos "do lado de fora" uma polarização nula, pois não há nenhum dipólo fora do material. Já "do lado de dentro" a polarização pode ser não nula, e portanto o lado direito de (6.47) será não nulo.

Para deixar estrutura do vetor deslocamento, façamos um pequeno resumo. Em um meio com polarização $\vec{P}$ o vetor deslocamento $\vec{D}$ é dado por $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$. As equações satisfeitas por $\vec{D}$ são

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho_f \\ \vec{\nabla} \times \vec{D} &= \vec{\nabla} \times \vec{P}\ . \end{aligned} \tag{6.49}$$

As condições de contorno satisfeitas são

$$(\vec{D}_1)_\perp - (\vec{D}_2)_\perp = \sigma_f$$
$$(\vec{D}_1)_\parallel - (\vec{D}_2)_\parallel = (\vec{P}_1)_\parallel - (\vec{P}_2)_\parallel \ . \qquad (6.50)$$

Este conjunto de equações e condições de contorno é suficiente para definir de forma precisa o vetor deslocamento. Tudo isso pode parecer muito geral. Vejamos, portanto, uma aplicação.

Atividade 4

Uma esfera está uniformemente polarizada, com polarização $\vec{P} = P_0\hat{z}$. Qual é a densidade de carga ligada superficial nesta esfera? e a densidade de carga ligada volumétrica?

Resposta:Como sabemos que a densidade de carga ligada superficial é dada por $\sigma_b = \vec{P}\cdot\hat{n}$, temos que encontrar $\hat{n}$. Para uma esfera, podemos usar coordenadas esféricas, o que nos dá $\hat{n} = \hat{r}$. Assim, a densidade de carga ligada supercial é

$$\sigma_b = \vec{P}\cdot\hat{n} = P_0\hat{z}\cdot\hat{r} = P_0\cos\theta \ . \qquad (6.51)$$

Para a densidade de carga volumétrica, temos $\rho_b = \vec{\nabla}\cdot\vec{P} = \vec{\nabla}\cdot P_0\hat{z} = 0$.

Atividade 5

É feita uma cavidade esférica em um meio dielétrico, de constante dielétrica ϵ. No centro desta cavidade se encontra uma carga pontual q. Calcule o campo elétrico em todo o espaço.

Resposta:

Como sempre, devemos começar analisando a simetria do nosso problema. Da maneira que ele foi formulado, fica evidente que temos um problema de simetria esférica. Assim, podemos partir do fato de que o campo elétrico será dado por $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$. Como em um meio dielétrico linear, o vetor deslocamento é proporcional ao campo elétrico, temos que $\vec{D}(\vec{r}) = D(r)\hat{r}$, e que $\vec{D}(\vec{r}) = \epsilon\vec{E}(\vec{r})$. Podemos aplicar a lei de Gauss para o vetor deslocamento, que depende apenas da carga livre, obtendo

$$D(r)4\pi r^2 = q \Rightarrow D(r) = \frac{q}{4\pi r^2} \qquad (6.52)$$

Este resultado é válido tanto dentro da cavidade quanto fora. Assim, no interior da cavidade, temos

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r} \qquad (6.53)$$

e fora temos

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2}\hat{r} \qquad (6.54)$$

Atividades finais

1. Considere um condutor perfeito, esférico, de raio a. Faz-se uma cavidade em seu interior, também esférica, e de raio $b < a$, com o mesmo centro que o condutor. No centro colocamos uma carga q. Descreva o campo elétrio em todo o espaço, assim como a distribução de carga nas superfícies do condutor. O que mudaria se a carga não se encontrasse exatamente no centro da esfera?

2. Considere uma esfera de raio R, uniformemente polarizada, isto é, a polarização em seu interior é dada por $\vec{P} = P_0\hat{z}$. Calcule as densidades de carga ligada superficial e volumétrica. Qual o momento de dipólo total desta esfera? Existem vários métodos para se calcular o campo elétrico no interior e exterior da esfera, e aqui veremos um deles. Suponha que o campo elétrico é uniforme no interior da esfera e é o campo de um dipólo no exterior. Como estas propostas para os campos satisfazem à equação de Maxwell no interior e no exterior, devemos verificar se é possível satisfazer as condições de contorno apropriadas. Aplique as condições de contorno para o campo elétrico, e mostre que no interior o campos será dado por $\vec{E} = -\vec{P}/3\epsilon_0$ e fora por $\vec{E} = (3(\vec{p}\cdot\hat{r})\hat{r} - \vec{p})/(4\pi\epsilon_0 r^3)$ com $\vec{p} = \vec{P}4\pi R^3/3$.

3. Um capacitor esférico é formado por duas cascas esféricas concêntricas, de raios a e $b > a$. Calcule a sua capacitância.

4. Considere um capacitor formado por dois condutores arbitrários $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$. Calcule da seguinte maneira a energia armazenada neste sistema: Comece com os dois condutores descarregados e passe carga de um para o outro aos poucos. Calcule o trabalho realizado em cada uma dessas passagens e, integrando, obtenha o trabalho total realizado.

Respostas comentadas

1. O campo é nulo no interior do condutor, e radial na cavidade e fora dele, sendo dado por
$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r} \tag{6.55}$$
Nas duas superfícies a densidade de carga é uniforme, sendo $-q/4\pi b^2$ na superfície da cavidade, e $q/4\pi a^2$ na superfície externa. Se a carga

não estiver no centro da esfera, a densidade de carga na superfície da cavidade não será uniforme, mas a densidade de carga na superfície externa será uniforme. O campo no condutor é nulo, e fora radial. No inerior do condutor o campo não é mais radial.

2. $\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{n} = P_0 \hat{z} \cdot \hat{r} = P_0 \cos\theta$. $\rho_b = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = 0$. O momento de dipólo será
$$\vec{p} = \int \vec{P} dV = \vec{P} \frac{4\pi R^3}{3}. \tag{6.56}$$
Se supomos que fora o campo elétrico é o campo de um dipólo, então é necessariamente dado por
$$\vec{E} = \frac{1}{(4\pi\epsilon_0 r^3)} (3\vec{p} \cdot \hat{r}\hat{r} - \vec{p}) \tag{6.57}$$
com $\vec{p}$ calculado acima. As condições de contorno implicam em
$$(\vec{E}_{\text{fora}} - \vec{E}_{\text{dentro}}) \cdot \hat{r} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{P_0 \cos\theta}{\epsilon_0} \tag{6.58}$$
Considerando que $\vec{E}_{\text{dentro}} = E_0 \hat{z}$, esta condição fornece
$$(\frac{2P_0}{3\epsilon_0} \cos\theta - E_0 \cos\theta = \frac{P_0 \cos\theta}{\epsilon_0} \Rightarrow E_0 = -\frac{1}{3\epsilon_0} P_0 \tag{6.59}$$

3. O campo entre os dois condutores é $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$. Assim, a diferença de potencial é
$$V = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{b-a}{ab} \tag{6.60}$$
A capacitância é
$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{b-a} \tag{6.61}$$

4. Como retiramos carga de um para o outro, em cada instante se a carga de um condutor é q a do outro será $-q$. Se em um certo estágio da transferência de carga de um para o outro, p condutor positivo está com $+q$, então a diferença de potencial entre os dois condutores será de $V = q/C$. Assim, ao levarmos δQ de um para o outro, estaremos realizando um trabalho $\delta W = \delta q q/C$. Integrando, obtemos
$$U = \int dW = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C} \tag{6.62}$$

Respostas comentadas

Resumo

As equações de Maxwell no limite estático, isto é, no limite em que as quantidades físicas não dependem do tempo, são $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\epsilon_0$ e $\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$. O estudo destas equações em meios materiais leva a conclusões surpreendentes, como por exemplo, o fato de o campo elétrico se anular no interior de um condutor perfeito. As equações de Maxwell, quando complementadas com as condições de contorno apropriadas, definem o campo elétrico de forma unívoca, ou seja, trata-se de um problema matemático bem definido. Uma aplicação importante é em capacitores, que são constituídos por dois condutores arbitrários, com cargas opostas. Existem diversos métodos desnvolvidos para resolver problemas de eletrostática na presen,a de condutores, entre os quais o método das imagens, que é de aplicação limitada, mas de grande apelo físico, e que pode ser aplicado em situações não triviais.

Além de condutores perfeitos, que são boas aproximações de materiais reais, como metais por exemplo, é interessante estudar o campo elétrico na presença de meios materiais chamados de meios dielétricos. É importante estudar o comportamento do campo elétrico tanto no interior destes meios materiais quanto nas interfaces entre dois meios. A condição de contorno nas interfaces é uma conseqüência direta das equações de Maxwell.

Os meios dielétricos possuem uma densidade de dipólos elétricos, análogo ao que fazemos quando tratamos de uma distribuição de cargas com uma densidade de cargas elétricas. Esta densidade de dipólos, que é chamada de polarização, pode ter sua origem na deformação das distribuições de carga na presença de um campo externo, ou devido ao alinhamento de dipólos permanentes. O tratamente de problemas é simplificado com a introdução do vetor deslocamento $\vec{D}$.