Divergência e Rotacional do Campo Magnético. A lei de Ampère.

Metas

- apresentar a formulação diferencial das equações da magnetostática ;
- apresentar a formulação integral das equações da magnetostática ;
- discutir as conseqüências de simetrias para o campo magnético.

Objetivos

Depois de estudar esta aula, você deverá ser capaz de

- calcular o campo magnético em situações simples, a partir das equações de Maxwell;
- identificar as simetrias de uma distribuição de correntes;
- calcular o campo magnético em situações simples, a partir da formulação integral da lei de Ampère.

As equações do campo magnético

Na aula 8 estudamos a lei de Biot-Savart, que é uma espécie de "lei de Coulomb" para o campo magnético. A partir da lei de Biot-Savart e do princípio da superposição, fomos capazes de escrever uma expressão geral para o campo magnético, uma vez que conhecemos as densidades de corrente. A expressão é

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\vec{r}' \, \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \, . \tag{9.1}$$

Em princípio, esta equação nos permite calcular o campo magnético para um dada distribuição de correntes, mas, como veremos, ela nem sempre é a melhor maneira de abordar um problema. Uma situação análoga acontece no caso do campo eletrostático. Como vimos, podemos calcular o campo elétrico explicitamente para uma distribuição de cargas, definida a partir da densidade de carga $\rho(\vec{r})$. A expressão que obtivemos na Aula 3 é

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{r}\,'\rho(\vec{r}\,')\frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \tag{9.2}$$

Como você sabe, muitas vezes, usar esta expressão não é o caminho mais fácil para a solução de um problema, como, por exemplo, no caso do campo elétrico de uma esfera uniformemente carregada. Muitas vezes é mais fácil usar as simetrias do problema junto com alguma lei integral, que no caso do campo elétrico é a lei de Gauss. Lembre, então como fizemos para calcular o campo elétrico de uma esfera uniformemente carregada: inicialmente escrevemos o campo elétrico como $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$, devido à simetria esférica. Em seguida, aplicando a lei de Gauss, obtivemos a função $E(r)$. Resumindo: o uso de simetrias e de uma lei integral facilitaram tremendamente o nosso trabalho. Nesta aula veremos que existe uma lei não para o fluxo, mas para a circulação do campo magnético, a lei de Ampère.

Além deste aspecto prático, é importante escrevermos as equações diferenciais para o campo magnético, pois é muito mais simples estudar as conseqüências destas equações do que de uma expressão como a Equação (9.1). Como sabemos do cálculo vetorial que o conhecimento da divergência e do rotacional de um campo vetorial, além de condições de contorno de origem física, como o valor do campo no infinito ou em certas superfícies, definem de maneira unívoca o campo que estamos investigando, devemos obter a divergência e o rotacional do campo magnético estático.

Lembre que estamos sempre considerando a magnetostática, o que significa que as quantidades físicas não variam com o tempo. Isso pode ser um pouco confuso neste ponto, porque você deve estar se perguntando “mas uma corrente não corresponde a cargas em movimento?”. De fato, uma corrente corresponde a cargas em movimento, mas isso não quer dizer que as nossas quantidades físicas dependam do tempo: a corrente pode ser constante, independente do tempo, apesar de as cargas estarem se movendo. Matematicamente queremos dizer que estamos considerando distribuições de corrente dadas por uma densidade de corrente $\vec{J}(\vec{r})$ apenas, e não $\vec{J}(\vec{r}, t)$.

A divergência de $\vec{B}$

Como vimos na Aula 8 uma das diferenças entre o campo elétrico e o campo magnético é que não existem cargas magnéticas, ou seja, as linhas de campo magnético não podem simplesmente "nascer" em um ponto, como no caso do campo elétrico. Isso significa que as linhas de campo magnético são fechadas, o que nos leva à conclusão de que o fluxo por uma superfície fechada deve se anular. Mas sabemos também que o fluxo de um campo vetorial está relacionado à sua divergência, o que nos levaria a concluir que $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$. Mostremos, então, que, de fato, essa conclusão está correta, a partir da Equação (9.1). Para isso, note inicialmente, que

$$\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \tag{9.3}$$

Podemos usar esta identidade para reescrever o integrando da Equação (9.1), por meio de um truque. Primeiro, note que, em geral, se $\vec{v}$ é um campo vetorial e f é uma função escalar, então temos

$$\vec{\nabla} \times (\vec{v} f) = f \vec{\nabla} \times \vec{v} + \vec{v} \times \vec{\nabla} f \ . \tag{9.4}$$

Verifique essa equação, voltando à Aula 2, se necessário. Substituindo $\vec{v}$ por $\vec{J}(\vec{r}')$ e f por $1/|\vec{r} - \vec{r}'|$ em 9.4, obtemos

$$\vec{J}(\vec{r}') \times \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \vec{\nabla} \times \left(J(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{\nabla} \times \vec{J}(\vec{r}') \tag{9.5}$$

Apesar de a notação não deixar totalmente claro, devemos lembrar que os rotacionais e gradientes calculados em 9.5 são em relação às coordenadas (x, y, z), e que o argumento de $\vec{J}(\vec{r}')$ é (x', y', z'). Isso significa que $\vec{\nabla} \times \vec{J}(\vec{r}') = 0$. Finalmente, temos,

$$\vec{J}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \vec{J}(\vec{r}') \times \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \ . \tag{9.6}$$

Assim, a Equação 9.1 é reescrita da seguinte forma

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\vec{r}' \vec{J}(\vec{r}') \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\vec{r}' \vec{J}(\vec{r}') \times \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\vec{r}' \vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \times \int d^3\vec{r}' \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \ . \end{aligned} \tag{9.7}$$

Usando a Equação (9.7), podemos calcular a divergência do campo magnético de maneira bem simples. Como escrevemos o campo magnético como o rotacional de uma certa função, a divergência de $\vec{B}$ é igual a zero, pois a divergência de um rotacional é sempre zero! Em equações, temos

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0}$$

Esta equação está de acordo com nossas expectativas, e é uma das equações de Maxwell em sua forma final.

O rotacional de $\vec{B}$

Agora que já sabemos que a divergência do campo magnético é zero, devemos calcular o rotacional de $\vec{B}$. No caso do campo eletrostático, pudemos usar o fato de as forças elétricas serem conservativas, o que, matematicamente se escreve dizendo que o rotacional do campo elétrico é nulo. Para o campo magnético não podemos argumentar desta maneira, pois a força magnética depende da velocidade da partícula e *nunca* realiza trabalho. No que se segue, calcularemos o rotacional da Equação 9.7, que é algo razoavelmente técnico. Se você não entender todos os detalhes em uma primeira leitura, não se desanime, o importante é conhecer as equações finais 9.33

Para calcularmos o rotacional do campo magnético, usaremos a Equação (9.1) e uma analogia com o campo elétrico. Para o campo eletrostático, sabemos que ele pode ser escrito como o gradiente de uma função potencial,

$$\vec{E} = -\nabla V \tag{9.8}$$

onde o potencial V é dado por

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV \tag{9.9}$$

Sabemos também, a partir da lei de Gauss, que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{9.10}$$

que, para o potencial, dá

$$\nabla^2 V(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \tag{9.11}$$

Isso nos dá a seguinte regra, que é apenas uma junção das Equações (9.9) e (9.11):

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV \right) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \tag{9.12}$$

Podemos escrever esta regra de forma mais geral, que será útil no que se segue, substituindo $\rho \to 4\pi\epsilon_0 f(\vec{r})$

$$\nabla^2 \int_{\mathcal{V}} \frac{f(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV = -4\pi f(\vec{r}) \tag{9.13}$$

Vejamos qual a conexão entre esta nossa pequena parada e o cálculo do rotacional do campo magnético. Como vimos, para uma distribuição de corrente estática, temos

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{\nabla} \times \int d^3\vec{r}\,' \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \tag{9.14}$$

que na verdade, é apenas o rotacional de um campo vetorial, que chamaremos de $\vec{A}$, ou seja

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{9.15}$$

onde $\vec{A}$ é dado por

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\vec{r}\,' \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \tag{9.16}$$

Portanto, o nosso problema de calcular o rotacional do campo magnético se reduz ao cálculo do rotacional de um rotacional! O primeiro passo é um exercício bastante simples, porém um pouco entediante, que se resume a mostrar que

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}\vec{\nabla} \cdot \vec{A} - \nabla^2 \vec{A} \tag{9.17}$$

Nesta equação, o laplaciano de um campo vetorial é dado, em coordenadas cartesianas, por um campo vetorial cujas componentes são o lapalaciano das componentes originais. É mais simples explicar com uma equação,

$$\nabla^2 \vec{A} = \nabla^2 A_x \hat{x} + \nabla^2 A_y \hat{y} + \nabla^2 A_z \hat{z} \tag{9.18}$$

Como a Equação (9.17) pode nos ajudar? Aplicando esta equação em (9.15) temos

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \tag{9.19}$$

Analisemos agora cada termo da lado direito de (9.19). Para facilitarmos, calculemos $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \vec{\nabla} \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\vec{r}\,' \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\vec{r}\,' \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\vec{r}\,' \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} - \vec{J}(\vec{r}\,') \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}
\end{aligned} \tag{9.20}$$

Usamos, da segunda para a terceira linha, a identidade

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{v} f) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) f + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} f \tag{9.21}$$

com $\vec{v}$ e f substituídos por $\vec{J}$ e $1/|\vec{r}-\vec{r}'|$, respectivamente.

Continuemos com nosso cálculo. Lembre que a divergência está sendo calculada em relação às coordenadas (x, y, z), e não (x', y', z'). Por isso, vemos que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{r}') = 0. \tag{9.22}$$

Para tratar do segundo termo em (9.16) usaremos um pequeno truque:

$$\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = -\vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}. \tag{9.23}$$

Na Equação (9.23) mudamos o gradiente que era calculado em termos de coordenadas $\vec{r}$ para um gradiente em $\vec{r}'$. Como isso pode nos ajudar? Usando as Equações (9.22) e (9.23), a divergência de $\vec{A}$ fica

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\vec{r}' \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} - \vec{J}(\vec{r}') \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\vec{r}' \vec{J}(\vec{r}') \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}
\end{aligned} \tag{9.24}$$

Agora daremos uma espécie de "passo para trás", reescrevendo o integrando de 9.24 da seguinte forma

$$\vec{J}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \vec{\nabla}' \cdot \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} - \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \tag{9.25}$$

Podemos usar agora a equação de continuidade que descreve a conservação da carga

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{9.26}$$

Como estamos estudando o caso estático, esta equação se reduz a

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \tag{9.27}$$

Assim, chegamos a

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\vec{r}' \vec{\nabla}' \cdot \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \tag{9.28}$$

E agora? Agora podemos usar o nosso velho conhecido teorema de Gauss, e transformar esta integral de volume em uma integral de superfície. Como estamos considerando uma distribuição de cargas localizada no espaço, isso significa que se considerarmos uma região do espaço grande o suficiente, a integral de superfície se dará em uma superfície na qual a densidade de corrente é nula, ou seja, concluimos que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \tag{9.29}$$

Devemos cuidar do segundo termo do lado direito da Equação (9.19)

$$\nabla^2 \vec{A} = \nabla^2 \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\vec{r}' \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \tag{9.30}$$

Essa equação corresponde a três "cópias" da Equação (9.13). Por exemplo, em coordenadas cartesianas, a componente x nos dá

$$\nabla^2 A_x = \nabla^2 \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\vec{r}' \frac{J_x(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \tag{9.31}$$

Assim, temos, usando a Equação (9.13),

$$\nabla^2 \vec{A} = \nabla^2 \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\vec{r}' \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\mu_0 \vec{J}(\vec{r}) \tag{9.32}$$

Finalmente, chegamos à nossa almejada equação para o rotacional do campo magnético no caso estático

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}}$$

Podemos coletar as equações para a divergência e rotacional do campo magnético, que formam um dos pares das eqauções de Maxwell, no caso estático

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad \text{e} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \tag{9.33}$$

Essas duas equações, complementadas pelas condições de contorno apropriadas, são suficientes para determinar o campo magnético estático. A equação da divergência do campo magnético nos diz, essencialmente, que não existem cargas magnéticas, os chamados monopólos magnéticos. A equação do rotacional nos diz que, no caso estático, as correntes são fontes de campo magnético, e que as linhas de campo magnético circulam ao redor das linhas de corrente. Se essa última afirmação não ficou clara, lembre a nossa dicussão de divergência e rotacional da Aula 2: o rotacional de um campo mede a circulação local deste campo. Como encontramos que o rotacional do campo magnético é proporcional à densidade de corrente elétrica, isso quer dizer que, localmente, a densidade de corrente elétrica é uma medida da circulação do campo magnético.

A Lei de Ampère

Assim como na eletrostática escrevemos as equações integrais para o campo elétrico, podemos (e devemos!) fazer o mesmo para a magnetostática.

Integrando a equação da divergência de $\vec{B}$ em (9.33) por um volume $\mathcal{V}$ arbitrário, temos

$$\int_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} dV = \oint_{\mathcal{S}} \vec{B} \cdot \hat{n} dA = 0 \tag{9.34}$$

A primeira igualdade é uma aplicação do teorema de Gauss, e a segunda é uma conseqüência do fato de a divergência de $\vec{B}$ ser nula.

Integrando a equação do rotacional de $\vec{B}$ em (9.33) e aplicando o teorema de Stokes, obtemos

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \int_{\mathcal{S}} \vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot \hat{n} dA = \mu_0 \int_{\mathcal{S}} \vec{J} \cdot \hat{n} dA = \mu_0 I \tag{9.35}$$

Aqui, $\mathcal{C}$ é um circuito arbitrário dado, e $\mathcal{S}$ é uma superfície que escolhemos cujo único vínculo é ter o circuito $\mathcal{C}$ como borda. Estas duas equações, 9.34 e 9.35, são a formulação integral das equações é equivalente à formulação diferencial 9.33, e uma pode ser deduzida da outra. Partimos da formulação integral e chegamos a expressões para o fluxo e circulação por superfícies e circuitos arbitrários. Para obtermos as expressões diferenciais a partir das expressões integrais, basta considerar uma superfície ou circuito infinitesimais, e usar as definições de divergência e rotacional que apresentamos na Aula 2.

Qual é a utilidade de termos formulações integrais? Como você verá nas atividades, quando temos alguma simetria no problema, a formulação integral da lei de Ampère pode simplificar muito a nossa vida.

Antes de fazermos nossa primeira aplicação da lei de Ampère, vale a pena discutirmos como o campo magnético depende da simetria da distribuição de correntes. Para facilitar a compreensão, discutamos rapidamente o caso análogo para uma distribuição de cargas elétricas.

Considere uma distribuição de cargas elétricas que possui um plano de simetria Σ, como mostra a Figura (9.1). Cada elemento de carga de um lado

Fig. 9.1: Plano de simetria para uma distribuição de cargas elétricas.

do plano, tem um elemento correspondente do outro. A pergunta é, para onde aponta o campo elétrico da distribuição de cargas?

Pela lei de Coulomb, e a geometria do problema, vemos que para cada par de elementos de carga, o campo elétrico resultante estará sempre contido no plano de simetria Figura (9.2). Devido ao princípio da superposição, se isso vale para qualquer par de elementos de carga, então valerá para a soma de todos os pares. Assim, chegamos à conclusão de que se uma distribuição de cargas possui um plano de simetria, então o campo elétrico desta distribuição estará contido no plano de simetria.

Fig. 9.2: Resultante do campo elétrico de um par de elementos de carga simétricos em relação ao plano Σ.

A situação para o campo magnético é muito parecida, mas devemos adaptar a geometria do caso da lei de Coulomb para a lei de Biot-Savart. Considere, então, uma distribuição de corrente que possui um plano de simetria. Se considerarmos dois elementos de corrente "emparelhados", como mostra a Figura 9.3, o que podemos concluir sobre a direção do campo magnético?

Fig. 9.3: Plano de simetria para uma distribuição de corrente elétrica.

A lei de Biot-Savart nos diz que o campo magnético em um ponto P é proporcional à $d\vec{l}\times\vec{r}$, onde $d\vec{l}$ é o elemento de circuito por onde passa corrente, e $\vec{r}$ é o vetor que vai do elemento de corrente até o ponto P. Consideremos dois elementos de corrente "espelhados" $d\vec{l_1}$ e $d\vec{l_2}$, e um ponto P no plano de simetria. Inicialmente, note que podemos decompor cada elemento de corrente em uma parte que é paralela e uma parte que é perpendicular ao plano

$$d\vec{l} = d\vec{l}_{\parallel} + d\vec{l}_{\perp} \tag{9.36}$$

Como as componentes de cada elemento de circuito estão relacionadas? Ora, as componentes paralelas ao plano devem ser iguais, mas as componentes perpendiculares tem o sinal oposto, como fica claro pela figura Figura 9.4. Assim, temos

Fig. 9.4: As componentes perpendiculares ao plano de simetria apontam em sentidos conrários.

$$d\vec{l}_1 = d\vec{l}_\parallel + d\vec{l}_\perp \qquad \text{e} \qquad d\vec{l}_2 = d\vec{l}_\parallel - d\vec{l}_\perp \tag{9.37}$$

A mesma decomposição geométrica vale para os vetores $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ que vão dos elementos de corrente até o ponto P

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_\parallel + \vec{r}_\perp \qquad \text{e} \qquad \vec{r}_2 = \vec{r}_\parallel - \vec{r}_\perp \tag{9.38}$$

Como as correntes que passam por cada um destes elementos de corrente são iguais, afinal, o plano é um plano de simetria, para calcular a direção do campo magnético, basta calcularmos $d\vec{l}_1 \times \vec{r}_1 + d\vec{l}_2 \times \vec{r}_2$, usando as decomposições 9.38 e 9.37:

$$\begin{aligned} d\vec{l}_1 \times \vec{r}_1 + d\vec{l}_2 \times \vec{r}_2 &= (d\vec{l}_\parallel + d\vec{l}_\perp) \times (\vec{r}_\parallel + \vec{r}_\perp) + (d\vec{l}_\parallel - d\vec{l}_\perp) \times (\vec{r}_\parallel - \vec{r}_\perp) \\ &= 2d\vec{l}_\parallel \times \vec{r}_\parallel \end{aligned} \tag{9.39}$$

Na passagem da primeira para a segunda linha usamos a propriedade distributiva do produto vetorial, e que $d\vec{l}_\perp \times \vec{r}_\perp = 0$, uma vez que, como só existe uma direção perpendicular ao plano de simetria, os vetores $d\vec{l}_\perp$ e $\vec{r}_\perp$ são paralelos (os dois apontam na direção perpendicular ao plano de simetria!). Como o que sobrou foi o produto vetorial de dois vetores no plano de simetria, $d\vec{l}_\parallel$ e $\vec{r}_\parallel$, o produto vetorial deles é perpendicular ao plano de simetria, e chegamos ao resultado que queriamos: a soma dos campos magnéticos de cada elemento de corrente é perpendicular ao plano de simetria. Usando o princípio da superposição, chegamos ao resultado final, se um plano é um plano de simetria de uma distribuição de correntes, então o campo magnético é perpendicular a este plano. Esta é uma regra importante que usaremos várias vezes, e portanto vale a pena lembrá-la.

Atividade 1

Usando a lei de Ampère, calcule o campo magnético de um fio inifinito que conduz uma corrente I.

Solução:

Inicialmente, devemos escolher o sistema de coordenadas apropriado. Neste caso, devido à simetria da distribuição de correntes, usaremos o sistema de coordenadas cilíndricas. O campo magnético é dado, então, por $\vec{B}(s,\theta,z) = B_s\hat{s} + B_\theta\hat{\theta} + B_z\hat{z}$, e em princípio, cada uma das funções B_s, B_θ e B_z é função de todas as coordenadas. Como o fio se estende ao longo do eixo z, o campo magnético não pode depender de z: se nos movermos para cima (z positivo) ou para baixo (z negativo), mantendo s e θ constantes, o campo magnético não pode mudar. Além disso, devido à simetria axial, ao girarmos ao redor do fio, mantendo s constante, o campo não pode mudar. Assim, concluímos que o campo magnético só pode depender de s. Mas para onde ele aponta?

Usando a regra da simetria que mostramos antes da atividade, sabemos que o campo magnético terá que ser perpendicular ao plano de simetria da distribuição de correntes. Como qualquer plano que passa pelo fio é um plano de simetria, o campo magnético tem que ser perpendicular a estes planos, e a única solução para isso é que o campo "gire" ao redor do fio, ou seja, que tenha apenas a componente $\hat{\theta}$. Assim, chegamos, usando apenas argumentos de simetria, que o campo magnético deve ser da forma

$$\vec{B} = B(s)\hat{\theta} \tag{9.40}$$

Falta encontrarmos a função $B(s)$. Para isso usaremos a lei de Ampère. Escolhendo um circuito de raio R, com centro no fio e perpendicular ao eixo do fio, temos

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}\cdot d\vec{r} = B(R)2\pi R = \mu_0 I \Rightarrow B(s) = \frac{\mu_0}{2\pi s} I \tag{9.41}$$

O campo magnético, é, portanto,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi s} I\hat{\theta} \tag{9.42}$$

Bem mais simples do que o cálculo pela lei de Biot-Savart!

Podemos fazer uma outra aplicação da lei de Ampère para um cilindro infinito com uma corrente enrolada ao redor dele.

Atividade 2

Considere um cilindro infinito de seção circular de raio R. Uma corrente I passa por um fio que está enrolado no cilindro. Suponha que o número de voltas por unidade de comprimento é n. Calcule o campo magnético em todo o espaço.

Solução:

Em primeiro lugar, escolhemos o sistema de coordenadas. Neste caso, o sistema de coordenadas cilindricas é o mais apropriado. Em seguida devemos explorar as simetrias do problema. Como o cilindro é infinito, o campo magnético não pode depender de z. Além disso, devido à simetria axial, o campo não pode depender do ângulo θ. Assim, o campo magnético é uma função de s apenas. Mas para onde ele aponta?

Usemos a nossa regra sobre a simetria da distribuição e corrente. Se considerarmos um plano perpendicular ao cilindro, vemos que é um plano de simetria: para cada espira de um lado do plano há uma espira do outro lado. O campo magnético deve ser perpendicular a esse plano, ou seja, é paralelo ao eixo z. Chegamos à conclusão que

$$\vec{B} = B(s)\hat{z}. \tag{9.43}$$

Usando a lei de Ampère, podemos calcular o campo fora e dentro do cilindro. Considere o circuito $\mathcal{C}_1$ retangular, como mostra a Figura 9.5. Como esse

Fig. 9.5: Amperiana retangular fora do cilindro.

circuito não é atravessado por nenhuma corrente, a circulação do campo magnético é igual a zero. Os trechos BC e DA não contribuem para a circulação, porque o campo magnético é perpendicular a eles. O resultado da lei de Ampère é

$$\oint_{\mathcal{C}_1} \vec{B} \cdot d\vec{r} = (B(a) - B(a+d))L = 0 \Rightarrow B(a) = B(a+d) \tag{9.44}$$

A Equação (9.44) mostra que o campo magnético fora do cilindro é constante, pois d é arbitrário. Quanto será que vale essa constante? Para determinarmos o valor dessa constante, note que muito longe do cilindro, um observador verá pequenos circuitos circulares de raio R um em ciam do outro. Como o campo de um dipólo cai com $1/r^3$, a soma dos campos destes dipólos (uma integral) cairá, no máximo, como $1/r^2$, ou seja, muito longe do cilindro o campo magnético será nulo. Com isso concluimos que o campo magnético deve ser nulo em toda a região fora do cilindro.

Resta calcular o campo magnético dentro do cilindro. Para isso utilizaremos o circuito $\mathcal{C}_2$ mostrado na Figura (9.6). A aplicação da lei de

Fig. 9.6: Amperiana parcialmente fora do cilindro.

Ampère fornece

$$\oint_{\mathcal{C}_2} \vec{B} \cdot d\vec{r} = B(r)L = \mu_0 nLI \Rightarrow B(r) = \mu_0 nI \tag{9.45}$$

Na dedução da Equação (9.45) usamos o fato que o campo magnético fora do cilindro é zero, e que os trechos BC e DA são perpendiculares ao campo magnético, e que um trecho de comprimento L é atravessado por nL espiras. Concluimos então, que no interior do cilindro, o campo magnético é dado por

$$\vec{B} = \mu_0 nI\hat{z} \tag{9.46}$$

O campo magnético é constante e não nulo no interior do cilindro e nulo fora do cilindro.

Atividade 3

Um toro é uma superfície de revolução gerada da seguinte maneira: gire um círculo de raio R ao redor de um eixo no mesmo plano que o círculo. Essa superfície é parecida com uma rosquinha, como mostra a Figura (9.7).

Fig. 9.7: O toro parece uma rosquinha.

Suponha que este toro está enrolado por um fio que conduz uma corrente I, e que temos N espiras, onde N é muito grande. Calcule o campo magnético em todo o espaço.

Solução:

Você já deve saber como proceder aqui. Escolha do sistema de coordenadas, encontre a simetria do problema e aplique da lei de Ampère. O sistema de coordenadas é o cilíndrico, mais uma vez. Por simetria axial, o campo não pode depender do ângulo θ. Um plano que corte o toro como mostra a Figura (9.8) é um plano de simetria. Portanto o campo magnético deve ser

Fig. 9.8: Um plano de simetria do toro.

perpendicular a este plano. Como podemos girá-lo, o campo magnético é, necessariamente, da forma

$$\vec{B} = B(s,z)\hat{\theta} \tag{9.47}$$

Escolhendo o circuito $\mathcal{C}_1$ para amperiana, como mostra a Figura (9.9), concluimos que o campo magnético fora do toro é nulo

$$\oint_{\mathcal{C}_1} \vec{B}\cdot d\vec{r} = B(s,z)2\pi R = 0 \Rightarrow B(s,z) = 0 \tag{9.48}$$

Para uma amperiana circular $\mathcal{C}_2$ interna ao toro, como mostra a Figura

Fig. 9.9: Amperiana $\mathcal{C}_1$ fora do toro.

(9.10), a superfície que tem este circuito como borda é atravessado N vezes por fios que conduzem uma corrente I. A lei de Ampère fornece

Fig. 9.10: Amperiana $\mathcal{C}_2$ interna ao toro.

$$\oint_{\mathcal{C}_2} \vec{B} \cdot d\vec{r} = B(R,z)2\pi R = \mu_0 NI \Rightarrow B(R,z) = \frac{\mu_0}{2\pi R} NI \qquad (9.49)$$

Assim, concluimos que o campo magnético é nulo fora do toro, e no seu interior é dado por

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi s} NI\hat{\theta}\ . \qquad (9.50)$$

Cabe uma última observaçao, aqui: o fato de a seção transversal do toro ser circular não teve nenhum papel em nosso cálculo. O resultado acima é válido para uma superfíce de revolução gerada por uma curva fechada que gira ao redor de um eixo em seu plano, um toróide de revolução.

Condições de Contorno para o Campo Magnético

Na Aula 6 estudamos as condições de contorno para o campo elétrico em uma interface. Naquela aula, mostramos que a componente tangencial do campo elétrico é contínua, $(\vec{E}_1)_{\parallel} - (\vec{E}_2)_{\parallel} = 0$, o que é uma conseqüência de $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$, e que a componente perpendicular sofre uma descontinuidade proporiconal à densidade de carga superficial, $(\vec{E}_1)_{\perp} - (\vec{E}_2)_{\perp} = \sigma/\epsilon_0$, o que é uma conseqüência de $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$. Para deduzirmos as condições de contorno para o campo magnético devemos seguir um paralelo com o que fizemos na Aula 6 para o campo elétrico, e por isso pode ser uma boa idéia você revisar a seção adequada daquela aula.

Comecemos pela equação $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$. Essa equação é totalmente análoga à lei de Gauss para o campo elétrico, com a simplificação que do lado direito é zero, e não ρ/ϵ_0. Assim, ela nos permite encontrar a condição para as componentes perpendiculares a uma interface. Para o campo elétrico encontramos que seria propocional à densidade de carga superficial. Neste caso, temos

$$(\vec{B}_1)_{\perp} - (\vec{B}_2)_{\perp} = 0 \qquad (9.51)$$

A componente perpendicular do campo magnético é sempre contínua.

A equação $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ é diferente da correspondente no caso elétrico, pois para o campo elétrico $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$. Consideremos uma superfície, como mostra a Figura (9.11), na qual existe uma corrente superficial. Considerando o circuito retangular $\mathcal{C}$, e tomando o limite em que o lado que "perfura" a superfície vai a zero, temos

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{r} = ((B_1)_{\parallel} - (B_1)_{\parallel})\Delta L = \mu_0 \Delta I \qquad (9.52)$$

Fig. 9.11: Corrente superficial em uma superfície e o circuito $\mathcal{C}$ apropriado para a aplicação do teorema de Stokes.

Como a corrente que atravessa o circuito é proporcional ao comprimento ΔL, da mesma forma que para uma distribuição de corrente volumétrica, a corrente que atravessa um elemento de área é proporcinal à área deste elemento, $\Delta I = J\Delta A$, neste caso temos $\Delta I = K\Delta L$. Portanto, a componente tangencial é descontínua, e esta descontinuidade é medida pela corrente superficial que atravessa um pequeno elemento de linha

$$(\vec{B}_1)_{\parallel} - (\vec{B}_2)_{\parallel} = \mu_0 K \tag{9.53}$$

Note que para aplicar esta equação escolhemos o circuito de uma forma especial: ele tem que ser perpendicular à direção da corrente superficial.

Atividade 4

Verifique que as equações de Maxwell e condições de contorno apropriadas são satisfeitas para o campo que encontramos na Atividade 2.

Solução:Como não há corrente dentro ou fora do cilindro, e como o campo magnético que achamos é constante em cada uma dessas regiões, temos $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ e $\vec{\nabla}\times\vec{B} = 0$, como deveria ser. Na superfície do cilindro o campo magnético é tangnecial, e portanto $(\vec{B}_1)_{\perp} = (\vec{B}_2)_{\perp} = 0$, e $(\vec{B}_1)_{\perp} - (\vec{B}_2)_{\perp} = 0$. Resta apenas verificarmos a condição para a componente tangencial. Como fora do cilindro o campo magnético é zero e dentro é $\vec{B} = \mu_0 nI\hat{z}$, temos

$$(\vec{B}_1)_{\parallel} - (\vec{B}_2)_{\parallel} = \mu_0 nI \tag{9.54}$$

Resta saber se o lado direito é, de fato, a corrente superficial por unidade de comprimento. Para tanto, note que para um trecho de comprimento ΔL, o circuito é "perfurado" $n\Delta L$ vezes, e portanto a corrente que atravessa o circuito é $n\Delta LI$, ou seja, $K = nI$, e concluimos que o lado direito de 9.54 é, de fato, $\mu_0 K$.

Resumo

A partir da lei de Biot-Savart e de princípio da superposição é possível calcular o campo magnético para uma distribuição de correntes que não varia no tempo. É útil, porém, termos uma descrição diferencial e integral das leis que governam o campo magnetostático, em particular, conhecer a divergência e o rotacional do campo magnético. O fluxo e circulação podem ser obtidos facilmente a partir das equações diferenciais, mediante a aplicação do teorema de Gauss e do teorema de Stokes, respectivamente.

A circulação do campo magnético por um circuito $\mathcal{C}$ é proporcional à corrente que passa por uma superfície que tem este circuito como borda, e esta relação é a lei de Ampère. A lei de Ampère, assim como a lei de Gauss para o fluxo na eletrostática, juntamente com as simetrias da distribuição de cargas, permite que se calcule o campo magnético em algumas configurações não triviais.

As equações de Maxwell permitem que se encontre as condições de contorno na presença de interfaces, de forma semelhante ao que fizemos na Aula 6 para o campo elétrico. Estas condições de contorno, juntamente com as equações de Maxwell, são suficientes para determinarmos o campo magnético em todo o espaço.

Exercícios

1. Calcule o campo magnético associado ao potencial vetor

$$\vec{A} = B_0(y\hat{x} - x\hat{y}). \tag{9.55}$$

   Qual é a corrente neste caso?

2. Um cilindro infinito de seção transversal circular de raio R conduz uma densidade de corrente uniforme $\vec{J} = I/(\pi R^2)\hat{z}$. Aplicando a lei de Ampère e usando as simetrias do problema, calcule o campo magnético em todo o espaço.

3. Considere a distribuição de corrente do item anterior. Em vez de resolver este problema usando a lei de Ampère, resolveremos usando as equações de Maxwell.

   (a) Usando coordenadas cilíndricas, escreva a forma do campo magnético. De que coordenadas ele depende?

(b) Substitua o campo do subitem anterior e econtre uma equação diferencial para o campo magnético.

(c) Resolva esta equação para a distribuição de correntes do problema.

4. Encontre o campo magnético gerado por um plano infinito que possui uma densidade superficial de carga σ que se move com uma velocidade $\vec{v}$ uniforme, paralela ao plano.