Variáveis Complexas e Aplicações

A vida é mais simples no plano complexo

M. Moriconi [1]
Departamento de Física
Universidade Federal Fluminense
Av. Litorânea s/n, Boa Viagem - CEP 24210-340
Niterói, Rio de Janeiro, Brazil

Resumo

Apresentamos uma introdução elementar à teoria de funções de variáveis complexas, tendo em vista aplicações em física: mecânica dos fluidos, eletrostática, mecânica estatística. Outras aplicações mais modernas são mencionadas no fim.

[1] `email:moriconi@if.uff.br`

Conteúdo

1 Aula 1

God used beautiful mathematics in creating the world.

P. A. M. Dirac

1.1 Preâmbulo semi-filosófico

Um dos grandes mistérios da física é o fato de podermos escrever as leis da natureza e suas conseqüências de forma matemática. Pelo que eu sei não há nenhuma razão para ser assim, além do fato de este método ter funcionado de forma espetacular, nas mais variadas escalas, desde Galileo e Newton até os dias de hoje. Um segundo mistério é o fato de a matemática que se usa na descrição da natureza é, frequentemenete profunda e elegante. Pode ser que isso seja devido ao fato de que ela é, afina de contas, feita por nós mesmos, e assim existe uma naturalidade em sua construção. Mas de qualquer maneira nunca deixa de ser surpreendente quando um belo resultado matemático tem aplicação em física, ou até mesmo o contrário, e um resultado matemático é antecipado baseado em idéias físicas. Esta simbiose tem sido muito fértil, e, sem dúvida, mostra o respeito que físicos e matemáticos devem ter um pelo outro.

Neste curso estudaremos uma das áreas que tem sido mais generosa em suas aplicações, a teoria de funções de variáveis complexas. É possível que muitos já tenham estudado alguns de seus aspectos em seus cursos de graduação e que não vejam tanta novidade quanto gostariam. A esses alunos eu peço minhas desculpas antecipadas, mas ainda nesse caso espero que em cadda aula haja alguma coisa que ele ou ela possa levar para casa. Aos que nunca foram expostos a essas idéias, espero que o que se segue seja razoavelmente coerente, e, acima de tudo, útil.

A abordagem que apresentaremos não tem absolutamente nenhuma pretensão de ser rigorosa, mesmo de acordo com as exigências de um físico matemático, imagine então para uma matemático... A idéia é apresentar certas ídéias e aplicações de forma que seja, pelo menos, natural para um estudante de graduação, que abra o seu apetite para querer saber mais sobre o assunto, e que mostre que existem técnicas matemáticas extremamente úteis para um físico, e que deve mser utilizadas sempre que possível, ou seja, quando tornam a vida mais simples.

O que você deve esperar, então? A estrutura do curso é mais ou menos a seguinte. Faremos uma introdução aos números complexos, funções complexas e a partir daí estudaremos algumas de suas propriedades, em particular as condições de Cauchy-Riemann, a propriedade conforme de um mapeamento complexo, e a relação com funções harmônicas em duas dimensões, que são soluções da equação de Laplace. Veremos como calcular integrais complexas, apresentando o teorema de

Cauchy, e a relação destas integrais complexas com integrais de variáveis reais que você já está a acostumado. Esta será, possivelmente, a primeira grande revelação do curso. Um vez que os fundamentos forem apresentados, iniciaremos aplicções. A primeira será em mecânica dos fluidos, onde estudaremos o fluxo de um fluido incompressível em duas dimensões, e entenderemos como um avião voa! Uma aplicação seguinte, que tem um certo parentesco com a primeira, mas é de natureza diversa, é no caso de problemas eletrostáticos, onde existem superfícies condutoras e simetria cilíndrica. CONTINUA...

A seguir um pequeno comentário bibliográfico.

1.2 Bibliografia comentada

Estas notas devem cobrir o essencial do curso, mas é sempre útil ter uma apresentação mais rigorosa e acesível.

1. L. Ahlfors "Complex Analysis", ... Esse é a *bíblia* da área. Escrito por um dos gigantes do século XX, é completo e bastante acessível.

2. G. Ávila, ... , Muito bem escrito, exatamente no nível de graduação avançado e que cobre o essencial. Além disso é fácil de se encontrar e a um preço razoável.

3. R. Silverman, ..., Nível semelhante ao do livro do Ávila, cobre um pouco a mais do que ele, e, apesar de importado é publicado pela Editora Dover, o que faz com que não seja muito caro.

Há muitos cursos na internet que podem ser úteis. Segue uma lista, mas chamo a atenção: ela foi criada a partir de uma simples busca no google, e o conteúdo das notas é de responsabilidade dos autores!

1. `http://www.maths.abdn.ac.uk/courses/mx3522/site/notes.html`

2. `http://www.math.lsu.edu/~neubrand/notes.pdf`

3. `http://www.math.gatech.edu/~cain/winter99/complex.html`

4. `http://www.pas.rochester.edu/~rajeev/phy401/analysis.pdf`

5. `http://www.dpmms.cam.ac.uk/~twk/CM.pdf`

6. `http://www.math.uiuc.edu/~r-ash/CV.html`

7. `http://www.ima.umn.edu/~arnold/502.s97/complex.pdf`

8. `http://mathews.ecs.fullerton.edu/fofz/mobius/`

Dos cursos acima, recomendo particularmente o de D. Arnold, item número 7. A sua leitura é exigente, mas é compacto e contem muita informação.

Sem mais delongas, podemos proceder com o curso.

1.3 Introdução aos números complexos

Considere a função, aparentemente inofensiva, $f(x) = 1/(1+x^2)$. Para $x^2 < 1$ sabemos que ela é a soma de uma série geométrica

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + ... \tag{1}$$

Um teste numérico nos dá muita confinaça de que o resultado está correto. Por exemplo, para $x = 0,21$, temos

$$f(0,21) = 0,957763... \tag{2}$$

enquanto para a série truncada temos

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} = 0,957763... \tag{3}$$

as duas expressões diferem em menos de uma parte em 10^6, o que é bastante bom. Assim a vida prossegue feliz, até que nos deparamos com $x = 1$... Neste caso temos $f(1) = 2$, enquanto a série fornece $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1...$, que não faz sentido algum! O que aconteceu? Onde erramos? Não há nada no eixo real que nos diga que estamos fazendo algo ilícito... Deixemos este enigma de lado por enquanto. [mencionar o teorema de steiner??].

1.4 Números complexos

O problema de resolver equações polinomiais de ordem maior ou igua a dois leva naturalmente a termos que lidar com expressões do tipo $\sqrt{-25}$, como por exemplo na solução de $x^2 + 25 = 0$. Mas como o gráfico da parábola não intersecta o eixo real, podemos fazer vista grossa para essa raiz de um número negativo. Um problema maior surgiu com a solução de equações de terceiro grau. Aliás, vale lembrar o comentário que Feynman fez sobre essa solução. Em suas próprias palavras [1]

> *They were very upset when I said that the thing of greatest importance to mathematics in Europe was the discovery by Tartaglia that you can solve a cubic equation-which, altho it is very little used, must have been psychologically wonderful because it showed a modern man could do something no ancient Greek could do, and therefore helped in the renaissance which was the freeing of man from the intimidation of the ancients-what they are learning in school is to be intimidated into thinking they have fallen so far below their super ancestors.*

Na verdade eu, humildemente, adicionaria um comentário ao de Feynman. Além de finalmente se ter ultrapassado os gregos em algo onde eles mostraram uma engenhosidade fabulosa, a solução de Tartaglia abriu as portas para os números complexos. Como você verá em um exercício, com esta solução não é possível fazer vista grossa para as raízes quadradas de números negativos. E isso também deve ter dado uma grande perspectiva ao homem do renascimento. Não apenas eles foram capazes de ultrapassar os antecessores, mas novas portas se abriram.

Um número complexo é um par (a, b), com a e b reais, com as seguintes propriedades de adição e multiplicação

$$
\begin{aligned}
(a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d) \\
(a, b) \cdot (c, d) &= (ac - bd, ad + bc)
\end{aligned} \tag{4}
$$

Vamos definir, então, um "número" imaginário $i = (0, 1)$. Da definição de produto, temos

$$
i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) \tag{5}
$$

ou seja, podesmos dizer que $i^2 = -1$. Em geral vamos escrever um número complexo da forma mais comum

$$
z = x + iy \tag{6}
$$

As operações de soma, multiplicação e conjugação são conhecidas. Se $z_k = x_k + iy_k$, com $k = 1, 2$, então

$$
\begin{aligned}
& z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2) \\
& z_1 z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \\
& \bar{z} = x - iy
\end{aligned} \tag{7}
$$

A norma de um número complexo é definida por $|z| = (z\bar{z})^{1/2}$. Isso nos leva a definir um número complexo em coordenadas polares

$$
\begin{aligned}
z = x + iy = (x^2 + y^2)^{1/2} \left(\frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}} + i \frac{y}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \right) = \\
\equiv \rho(\cos\theta + i \sin\theta)
\end{aligned} \tag{8}
$$

Assim somos levados a considerar a função $f(\theta) = \cos\theta + i \sin\theta$. Quais são as suas propriedades? É fácil ver que $f(0) = 1$, e a partir de relações trigonométricas que

$$
f(\alpha) f(\beta) = f(\alpha + \beta) \tag{9}
$$

Assim devemos ter $f(\theta) = \exp(\kappa\theta)$, para algum κ. Como $f'(0) = i$, obtemos $\kappa = i$, e podemos escrever uma das fórmulas mais importantes de toda teoria de variável complexa

$$
e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta \tag{10}
$$

Nestas notas de aula usaremos frequentemente a representação cartesiana e polar [2].

Uma fórmula muito importante que podemos deduzir de (9) e (10) é a fórmula de De Moivre. Tome $\alpha = \beta$ nestas duas equações. O resultado é

$$e^{2i\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta)^2 \tag{11}$$

Por indução chegamos facilmente a

$$e^{ni\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta)^n \tag{12}$$

para qualquer inteiro n. Pode-se mostrar a partir de (12) que esta fórmula é válida para n qualquer (inteiro, racional, real, complexo).

Podemos também expressar as funções trigonométricas em termos da função exponencial,

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \text{e} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \tag{13}$$

Estas fórmulas são extremamente úteis, especialmente no estudo de séries de Fourier.

Na representação polar vemos que $\sqrt{z\bar{z}} = \rho$. O ângulo θ é o chamado *argumento* de z, e se escreve $\arg(z) = \theta$. É fácil ver que $\arg(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2$.

1.5 Funções complexas

Podemos agora considerar uma função de uma variável complexa, $f(z)$. Uma função de variável complexa é simplesmente uma regra que estabelece uma relação entre números complexos em uma certa região D, que é o *domínio* da função, em uma outra região I, que é a sua *imagem*. O domínio e a imagem podem ser finitos, puramente reais, imaginários, ilimitados ou até mesmo todo o plano complexo.

Como a função $f(z)$ é um número complexo, podemos escrever

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \tag{14}$$

Antes de definirmos diferenciabilidade desta função, vamos definir continuidade. Usando os bons e velhos ϵ's e δ's, temos a definição natural de continuidade: $f(z)$ é contínua em z_0 se para todo ϵ dado, existe δ tal que

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \epsilon \tag{15}$$

[2] Note que esta "dedução" não é realmente uma prova de nada, pois não sabemos como tratar derivadas de funções complexas ainda. O que apresentamos é uma especie de argumento de plausibilidade apenas.

Esta condição permite mostrar que $f(z)$ é contínua se e somente se $u(x, y)$ e $v(x, y)$ são contínuas. Parece que ainda não temos muita informação nova. Mas veremos agora que a definição de derivada de uma função complexa fornece vínculos muito fortes sobre as funções $u(x, y)$ e $v(x, y)$.

1.5.1 Derivada de uma função complexa

Uma função complexa diz-se diferenciável em um ponto z_0 se o seguinte limite existe

$$\lim_{|h|\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \tag{16}$$

Note uma diferença deste caso para o caso real. No caso real só temos duas maneiras de chegar a um ponto, pela direita ou pela esquerda. Já no caso complexo temos um número infinito de maneiras de se aproximar de um ponto z_0. Assim, a exigência de que o limite acima existe é não trivial e deve ser analisada com carinho. Se considerarmos que h é real, temos

$$\begin{aligned} \lim_{|h|\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x, y) + i(v(x+\Delta x, y) - v(x, y))}{\Delta x} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \tag{17}$$

Se considerarmos porém que h é puramente imaginário, $h = i\Delta y$, obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{|h|\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \lim_{\Delta y\to 0} \frac{u(x, y+\Delta y) - u(x, y) + i(v(x, y+\Delta y) - v(x, y))}{i\Delta y} \\ &= -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned} \tag{18}$$

Para que o limite exista devemos ter, então

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \tag{19}$$

Estas são as condições de Cauchy-Riemann (CR). Você pode se perguntar agora, e se eu escolhesse uma direção qualquer? Por exemplo, $h = \epsilon(a + ib)$? Não se ganha nada de novo? A resposta é não, como você pode verificar em um exercício simples. Caeb aqui uma observação, porém: caso as derivadas das funções u e v não sejam contínuas, então satisfazer as condições de CR *não* garantem que a função $f(z)$ é derivável. De maneira mais tradicional, escrevemos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{20}$$

Uma função $f(z)$ diferenciável é chamada de *função analítica*, e elas são as protagonistas deste curso. No que se segue estudaremos suas propriedades matemáticas e aplicações em física.

Supondo agora que as derivadas de u e v existem em todas as ordens, obtemos, usando a igualdade das derivadas mistas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \tag{21}$$

ou seja, as funções u e v são soluções da equação de Laplace em duas dimensões! Uma solução da equação de Laplace é chamada de *função harmônica*, e as funções u e v são chamadas de *harmônicas conjugadas*.

Como estaremos usando coordenadas polares também, é útil escrever as condições de CR nestas coordenadas. Neste caso a função $f(z)$ é escrita como sendo $f(z) = u(\rho,\theta) + iv(\rho,\theta)$. Note que aqui há um abuso de notação: estamos usando as mesmas letras para denominar as funções, mas, claramente, elas devem ser diferentes do caso cartesiano. Uma maneira direta é simplesmente fazer uma mudança de variáveis nas condições de CR em coordenadas cartesianas. Uma maneira mais simples e elegante, porém, é fazer o mesmo que fizemos no caso cartesiano escolhendo direções apropriadas: em vez de x e y, faça um pequeno deslocamento em ρ e θ. Como você mostrará nos exercícios, neste caso obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} \tag{22}$$

Uma outra forma muito útil de se escrever as condições de CR é em termos das derivadas com relação à z e $\bar{z}$. Considere uma função de (x, y) qualquer, o que pode ser escrito $f(z,]bar z)$. Uma simples mudança de variáveis mostra que

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{23}$$

e é um exercício elementar mostrar que as condições de CR correspondem à

$$\frac{\partial f(z,\bar{z})}{\partial \bar{z}} \tag{24}$$

ou seja a função $f(z, \bar{z})$ só pode depender da variável z.

Note que para que uma função seja analítica em um certo ponto, as funções u e v e suas derivadas com relação à x e y devem existir. Um exemplo que merece ser estudado é a função $f(z) = \exp(-z^4)$. Verifique que as condições de CR são satisfeitas em $z = 0$, MAS se tomarmos o caminho para $z = 0$ ao longo de $z(t) = t\exp(i\pi/4)$, vemos que $f \to \infty$, ao contrário do que se passa quando $z = x$ ou $z = y$ apenas.

1.5.2 Interpretação geométrica

Vejamos agora qual o que as condições de CR implicam geometricamente. Considere uma função $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Podemos estudar as curvas de nível de u e v, $u(x, y) = u_0$ e $v(x, y) = v_0$. Suponha que essas curvas sse encontram em um certo ponto (x_1, y_1). Como sabemos de cálculo de várias variáveis, o gradiente de uma função é normal à superfície de nível, ou seja, neste caso temos no ponto (x_1, y_1), $\vec{\nabla} v(x, y) = v_x \hat{x} + v_y \hat{y}$ [3], que pelas condições de CR, nos dá

$$\vec{\nabla} v(x, y) = -u_y \hat{x} + u_x \hat{y} \tag{25}$$

O vetor perpendicular à curva $u(x, y) = u_0$ no ponto (x_1, y_1) é dado pelo gradiente de $u(x, y)$, $\vec{\nabla} u(x, y) = u_x \hat{x} + u_y \hat{y}$. O produto escalar destes dois gradientes é zero, o que significa que as normais são perpendiculares entre si. Mas no caso de curvas no plano isso significa que as tangentes também são perpendiculares! (por que?).

1.5.3 Transformação conforme

Acabamos de ver que as linhas $x = x_0$ e $y = y_0$ são mapeadas em linhas que se cruzam perpendicularmente. O que podemos dizer sobre curvas quaisquer, que se cruzam com um ângulo θ?

Considere duas curvas γ_1 e γ_2 que se encontram em z_0. Sem perda de generalidade podemos considerar $z_0 = 0$. Uma função $f(z)$ leva estas duas curvas em outras duas curvas, e podemos supor sem perda de generalidade que $f(z_0) = 0$. O ângulo entre as duas curvas é dado por

$$\arg\left(\frac{\Delta z_1}{\Delta z_2}\right) = \theta \tag{26}$$

e o ângulo entre as imagens é dado por

$$\arg\left(\frac{\Delta w_1}{\Delta w_2}\right) = \arg\left(\frac{f(\Delta z_1)}{f(\Delta z_2)}\right) = \arg\left(\frac{\Delta z_1 f'(0)}{\Delta z_2 f'(0)}\right) = \theta \tag{27}$$

ou seja, uma transformação analítica preserva os ângulos entre curvas! Esta simples propriedade tem conseqüências profundas no estudo de transições de fase em sistemas bidimensionais, como veremos na aula 5.

1.5.4 Exemplos

Três exemplos simples: $f(z) = z^2$ e $f(z) = e^z$ e $f(z) = 1/z$. Transformações de Moebius. Aplicação em geometria. Relação com transformações de Lorentz... teorema de steiner.

[3] O subscrito indica uma derivada parcial, por exemplo $u_x \equiv \partial u / \partial x$.

1.6 Observações

- Aqui apresentamos o plano complexo como a representação natural dos números complexos. Essa não é a única representação, porém, e uma outra muito útil e importante é a *esfera de Riemann*, que é definida por meio da projeção estereográfica.

- Não existe a noção de 'ordem' para os números complexos. Se existesse uma operação de '>', então como $i \neq 0$, deveríamos ter ou $i > 0$ ou $i < 0$. Em ambos os casos, multiplicando por i chegamos a contradições. Por exemplo, se $i > 0$ então $i^2 = -1 > 0$ [4]. Somando 1 a ambos os lados, $0 > 1$, ou seja, multimplicando por 1 a desigualdade inicial, temos $i < 0$, que é uma contradição.

1.7 Exercícios

1. Mostre a desigualdade triangular: $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

2. Mostre que a fórmula de De Moivre vale para n racional, real, complexo...

3. Calcule $\sum_{n=1}^{k} \sin n\theta$.

4. Mostre que $f(z)$ é contínua se e somente se $u(x, y)$ e $v(x, y)$ são contínuas.

5. Considere $h = \epsilon(a + ib)$, e calcule o limite (16). Mostre que as condições de CR são suficientes para mostrar que esse limite existe.

6. Uma função complexa pode ser contínua em todos os pontos, mas não-diferenciável em nenhum ponto! Verifique isso no caso da função $f(z) = x$ a partir das definições de continuidade e diferenciabilidade.

7. Verifique a equação (22). Use esta equação para encontrar o laplaciano em coordenadas polares.

8. Resolução da equação de terceiro grau passo a passo. Considere $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Queremos achar as soluções de $P(x) = 0$.

   (a) Mostre que podemos reescrever esta equação na forma mais simples $P(z) = z^3 + pz + q$, em termos de uma variável $z = x + k$. Encontre k, p e q.

[4] Note que ainda não sabemos se $-1 > 0$ ou $-1 < 0$, pois ainda não sabemos muito sobre essa nova operação $>$!

(b) Mostre que $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + 3ab(a+b) + b^3$. (fácil!)

(c) É sempre possível escrever $z = \alpha^{1/3} + \beta^{1/3}$, para algum par α e β. Use esta expressão e o item anterior para mostrar que a solução da equação de terceiro grau se reduz a resolver $-3(\alpha\beta)^{1/3} = p$ e $\alpha + \beta = -q$. Resolva e encontre as soluões da equação original.

(d) Aplique no caso $P(x) = x^3 - 15x - 4$. Uma das soluções é $x_1 = 4$. Divida este polinômio por $x - 4$ e resolva a equação quadrática resultante. Usando a fórmula de Tartaglia você encontrará números do tipo $(2 \pm \sqrt{-121})^{1/3}$. Então onde foi parar a solução $x = 4$? Mostre que $(2+\sqrt{-121})^{1/3} + (2-\sqrt{-121})^{1/3} = 4$.

9. Usaremos a fórmula de De Moivre para mostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = \pi^2/6$ de forma elementar, porém rigorosa.

   (a) Mostre que podemos escrever $\sin(2n+1)\theta = \sin^{2n+1}\theta P_n(\cot^2\theta)$. Encontre $P_n(\theta)$.

   (b) Encontre *todas* as raízes de $P_n(x) = 0$.

   (c) Mostre que $\sum_{r=1}^{n} x_r = n(2n-1)/3$.

   (d) Mostre que $\sin\theta < \theta < \tan\theta$, e portanto $(\cot\theta)^2 < \theta^2 < 1 + (\cot\theta)^2$. Use esta desigualdade e o resultado do item anterior para deduzir que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = \pi^2/6$.

2 Aula 2

2.1 Integração complexa

Agora que já sabemos alguma coisa sobre as propriedades de derivadas de funções de uma variável complexa, vamos estudar o problema da integração complexa. Como sempre, integrar é sempre mais difícil do que derivar, e é nesse ponto que estão muitas das dificuldades da física. Por exemplo, no eletromagnetismo você sabe absolutamente tudo sobre os campos elétrico e magnético a partir das equações de Maxwell. Se alguém te der uma solução que satisfaz as condições de contorno é uma simples questão de calcular alguams derivadas parciais e ter certeza de que as condições de contorno estão satisfeitas para podermos decidir se o problema foi resolvido completamente ou não. Por outro lado resolver um problema é outra história, e é por isso que temos que fazer tantos cursos de eletromagnetismo!

Existem técnicas que se aprendem nos cursos de cálculo que são muito úteis, mas alguams integrais parecem resisitir aos esforços tradicionais. Por exemplo, tente calcular

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+a\cos\theta} d\theta \tag{28}$$

com $a < 1$. Voltaremos a este problema no final da aula...

No caso de funções de variável complexa a situação é muito melhor, mas não a ponto de fazer com que todas as integrações fiquem triviais. Então primeiro definamos o que queremos dizer por integração complexa.

A integral de uma função complexa é definida da seguinte maneira. Temos o ponto de partida a e o ponto de chegada b, e um caminho $\mathcal{C}$ que une os dois pontos. Podemos marcar pontos z_k, com $k = 1, 2, \ldots, N$, neste caminho, tal que $|z_k - z_{k+1}| \to 0$ quando $N \to \infty$, e $z_1 = a$ e $z_N = b$. A integral de $f(z)$ é definida por

$$\int_{\mathcal{C}_{a\to b}} f(z)dz = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} f(\zeta_k)\Delta z_k \tag{29}$$

onde ζ_k é um ponto na linha que une z_k a z_{k+1} e $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k$. É muito parecido com a definição da integral de Riemann, mas como veremos agora, posui propriedades muito interessantes. O limite $N]to\infty$ é escrito

$$I = \int_{\mathcal{C}_{a\to b}} f(z)dz \tag{30}$$

O caminho que vai de a a b é parametrizado por $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, tal que $\gamma(0) = a$ e $\gamma(1) = b$. Assim a integral é dada por

$$\int_{\mathcal{C}_{a\to b}} f(z)dz = \int_0^1 f[\gamma(t)]\gamma'(t)dt \tag{31}$$

2.1.1 Teorema de Cauchy

Vamos mostrar que essa integral possui uma propriedade de independência de caminho. Suponha que dois caminhos $\gamma_i(t)$, $i = 1, 2$, partem de a e vão até b. Considere o caminho $\gamma(s;t) = (1-t)\gamma_1(t) + t\gamma_2(t)$. Suponha que $f(z)$ é analítica na região D onde estes caminhos estão definidos. Então temos

$$\int_0^1 f[\gamma_1(t)]\gamma'_1(t)dt = \int_0^1 f[\gamma_2(t)]\gamma'_2(t)dt \tag{32}$$

Para demonstrar isso considere $\phi(s)$ dada por

$$\phi(s) = \int_0^1 f[\gamma(s;t)]\gamma'(s;t)dt \tag{33}$$

Vamos mostrar que $\phi'(s) = 0$. Para isso note que

$$\begin{aligned}
\phi'(s) &= \int_0^1 f'(\gamma(s;t))\gamma_s(s;t)\gamma_t(s;t)dt + \int_0^1 f(\gamma(s;t))\gamma_{st}(s;t)dt \\
&= \int_0^1 f'[\gamma(s;t)]\gamma_s(s;t)\gamma_t(s;t)dt + \int_0^1 \partial_t(f[\gamma(s;t)]\gamma_s(s;t))dt \\
&- \int_0^1 f'[\gamma(s;t)]\gamma_t\gamma_s(s;t))dt \\
&= f[\gamma(s;t)]\gamma_s(s;t)|_0^1
\end{aligned} \tag{34}$$

Mas como $\gamma_s(s;t) = -\gamma_1(t)+\gamma_2(t)$, temos $\gamma_s(s;0) = \gamma_s(s;1) = 0$, e fica estabelecida a independência de caminho da integral. Note que tivemos que usar a analiticidade da função em todos os pontos da região que são atravessados pela família de camihos $\gamma(s;t)$.

Se consideraramos que o caminho γ_2 é a *volta* de b para a, então temos o seguinte magnífico resultado: A integral de uma função analítica em um caminho fechado é zero, ou, em equações

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)dz = 0 \tag{35}$$

Considere uma função analítica $f(z)$. Podemos agora estudar integrais do tipo

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z - z_0}dz \tag{36}$$

onde o ponto z_0 pode estar dentro ou não do circuito $\mathcal{C}$. Se estiver fora, a função $f(z)/(z - z_0)$ é analítica no seu interior e temos

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z - z_0}dz = 0 \tag{37}$$

mas no caso em que está dentro isto não é mais verdade. Para tratar desta situação, considere $g(z) = (f(z) - f(z_0))/(z - z_0)$, que é analítica em todo interior de $\mathcal{C}$. Isso nos dá

$$\oint_{\mathcal{C}} g(z)dz = 0 \Rightarrow \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z - z_0}dz = f(z_0)\oint_{\mathcal{C}} \frac{1}{z - z_0}dz \tag{38}$$

Tudo que precisamos fazer é calcular a integral de $1/(z - z_0)$. H[a v[arias maneiras de fazer isso, como você verá nos exercícios. A maneira que utilizaremos aqui consiste em "deformar" o percurso até circundar o ponto z_0 por uma pequena circunferência de raio δ contida no interior de $\mathcal{C}$. Assim temos

$$\oint_{calC} \frac{1}{z - z_0} = \int_{\mathcal{C}_\delta} \frac{1}{z - z_0}dz = \int_0^{2\pi} \frac{i\delta e^{i\theta}}{\delta e^{i\theta}}d\theta = 2\pi i \tag{39}$$

ou seja
$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i f(z_0) \tag{40}$$
Este é o célebre teorema da integral de Cauchy.

A partir do teorema de Cauchy podemos estudar a expansão de uma função analítica em série de potências. Defina uma função $f(z)$ da seguinte maneira
$$f(z) = \oint_{\mathcal{C}} \frac{\varphi(w)}{w-z} dw \tag{41}$$
onde $\varphi(w)$ é uma função contínua em $\mathcal{C}$, ou seja, é limitada por uma constante M, $|\varphi| < M$. Usando a identidade
$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{k} t^n + \frac{t^{k+1}}{1-t} \tag{42}$$
Como o ponto a está no interior de $\mathcal{C}$, a distância entre ele e o circuito $\mathcal{C}$ é R, e assim podemos reescrever a integral da seguinte maneira
$$\begin{aligned} f(z) = \oint_{\mathcal{C}} \frac{\varphi(w)}{w-z} dw = \oint_{\mathcal{C}} \frac{\varphi(w)}{(w-a)-(z-a)} dw = \sum_{n=0}^{k} (z-a)^n \oint_{\mathcal{C}} \frac{\varphi(w)}{(w-a)^{n+1}} dw + \\ + \oint_{\mathcal{C}} \frac{\varphi(w)}{w-z} \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^{k+1} dw \end{aligned} \tag{43}$$
Como $|w-a| \geq R$, e $|w-z| = |(w-a)-(z-a)| \geq R - |z-a|$, temos
$$\left| \oint_{\mathcal{C}} \frac{\varphi(w)}{w-z} \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^{k+1} dw \right| \leq \frac{ML(\gamma)}{R-|z-a|} \left(\frac{|z-a|}{R}\right)^{k+1} \tag{44}$$
onde $L(\gamma)$ é o comprimento da curva γ. Como $|z-a|/R < 1$, o erro vai a zero quando $k \to \infty$. Isto mostra que podemos escrever uma expansão em série de potências para uma função analítica, e que essa série tem um certo *raio de convergência*, que é até onde podemos ir de tal modo que o erro vai a zero quando $k \to \infty$. Neste caso temos
$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k \tag{45}$$
onde
$$c_k = \oint_{\mathcal{C}} \frac{\varphi(w)}{(w-a)^{k+1}} dw \tag{46}$$

Se considerarmos $\varphi(w) = f(w)$ analítica, temos

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k \tag{47}$$

Podemos entender agora o enigma da primeira aula: o que tem de errado com a função $f(x) = 1/(1+x^2)$? No eixo real, nada... Mas no plano complexo! Como $1/(1+x^2)$ não é analítica em $x = \pm i$, o círculo ao redor da origem não vê nenhum problema no eixo real, porém ele esbarra com os pontos $\pm i$, e é por isso que a série de potências de $1/(1+x^2)$ não funciona para $x \geq 1$!

2.1.2 Desigualdade de Cauchy

Há uma desigualdade simples que podemos obter a partir das considerações que temos feito. Sabemos que

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw \tag{48}$$

Se $\mathcal{C}$ for uma circunferência de raio R, e o valor máximo de $|f(z)|$ sobre $\mathcal{C}$ for $M(R)$, temos

$$|f^{(n)}(z)| \leq \left| \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw \right| \leq \frac{M(R) 2\pi R n!}{2\pi R^{n+1}} = \frac{M(R) n!}{R^n} \tag{49}$$

Esta desigualdade tem uma conseqüência importante, que é o teorema de Liouville, que demonstraremos a seguir.

2.1.3 Teorema de Liouville

Será que existem funções analíticas e limitadas no plano complexo todo? A resposta é dada pelo teorema de Liouville, que diz que se uma função é analítica no plano todo, então ela é necessariamente constante. A demonstração é uma conseqüência imediata da desigualdade de Cauchy. Considere uma bola de raio R ao redor de um ponto a. A desigualdade de Cauchy nos diz que

$$|f'(a)| \leq \frac{M(R)}{R} \tag{50}$$

Se $f(z)$ é analítica e limitada em todo plano, então quando $R \to \infty$, $f'(a) = 0$, ou seja, $f(z)$ tem que ser uma constante! O teorema de Liouville permite demonstrarmos o teorema fundamental da álgebra, como você fará nos exercícios.

2.2 Série de Taylor e Laurent

A expansão que acabamos de discutir é a chamada série de Taylor de uma função analítica. Considere agora duas funções $f_1(z)$ e $g(z)$ dadas por uma expansão em série de potências

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-a)^k \qquad \text{para} \qquad |z-a| < r_1 \\ g_1(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-a)^k \qquad \text{para} \qquad |z-a| < r_2 \end{aligned} \tag{51}$$

Podemos definir uma função $f_2(z) = g_1(\frac{1}{z-a} + a)$, que tem um série de potências válida para $|z-a| > r_2$. Se tivermos $r_1 > r_2$, então a função $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$ tem uma série de potências (positivas e negativas) que vale em uma região anular definida por $r_2 < |z-a| < r_1$. Esta expansão é a chamada *série de Laurent* de $f(z)$.

A função $f_1(z)$ é chamada *parte regular* de $f(z)$, e a função $f_2(z)$ de *parte principal* de $f(z)$. Note que a função $f(z) - f_2(z)$ é analítica em toda a região que estamos estudando.

2.3 Singularidades

Até agora estamos estudando funções analíticas e funções que admitem uma expansão em série de Laurent. Aqui apresentaremos a classificação das singularidades isoladas que uma função pode apresentar. Um ponto a é chamado de singularidade isolada se a função não é analítica em a, mas é analítica em um disco perfurado em a. As possíveis sigularidades isoladas são de três tipos:

1. *singularidade removível*: Uma singularidade é chamada removível se a série de Laurent correspondente possui apenas coeficientes de potências não negativas, ou seja, a expansão é em série de Taylor.

2. *pólo do ordem* n: ocorre quando $c_{-n} \neq 0$ para algum n e $c_{-m} = 0$ para todo $m > n$

3. *singlaridade essencial*: ocorre quando $c_{-n} \neq$ para um número infinito de valores de n.

É importante ter em mente um exemplo simples de cada um destes tipos de singularidades.

1. *singularidade removível*: Considere $f(z) = \sin z/z$ para $z \neq 0$ e $f(0) = 0$. Esta função é analítica em todos os pontos fora da origem, e na origem ela é descontínua, uma vez que $\lim_{z\to 0} \sin z/z = 1$. A expansão em série de $f(z)$ ao redors de uma bola com a origem removida é

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \ldots \tag{52}$$

onde não aparecem potências negativas de z. Se definirmos $f(0) = 1$ então obteremos uma função analítica em todos os pontos.

2. *pólo de ordem n*: Considere $f(z) = \sin z/z^5$. Neste caso a série de Laurent é

$$\frac{\sin z}{z^5} = z^{-4} - \frac{z^{-2}}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{z^2}{7!} + \ldots \tag{53}$$

Esta função possui um pólo de ordem 4 em $z = 0$. A expansão só vale para pontos fora de uma bola arbitrariamente pequena ao redor de $z = 0$, mas não em $z = 0$.

3. *singularidade essencial*: O exemplo clássico é $e^{1/z}$. A série de Laurent é

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{1!}z^{-1} + \frac{1}{2!}z^{-2} + \frac{1}{3!}z^{-3} + \ldots \tag{54}$$

O ponto $z = 0$ é claramente uma singularidade essencial.

2.4 Resíduos

Considere a série de Laurent de uma função $f(z)$ ao redor de um ponto a, ou seja, estamos considerando um disco de raio R perfurado em a. O coeficiente c_{-1} da série de Laurent é especialmente importante, e é o chamado resíduo da função $f(z)$ em a.

Por exemplo, considere a função $f(z) = 1/(z^2 + bz + c)$. Esta função é analítica exceto em dois pontos, as raízes $z_\pm$ de $z^2 + bz + c = 0$, o que nos permite escrever a série de Laurent de $f(z)$ ao redor de z_+ assim

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^2+bz+c} &= \frac{1}{z_+ - z_-}\left(\frac{1}{z-z_+} - \frac{1}{z-z_-}\right)\\ &= \frac{1}{z_+ - z_-}\left(\frac{1}{z-z_+} + \frac{1}{(z_+ - z_-) + (z - z_+)}\right)\\ &= \frac{1}{z_+ - z_-}\left(\frac{1}{z-z_+} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(z_+ - z_-)}\left(\frac{z-z_+}{z_+ - z_-}\right)^k\right)\end{aligned} \tag{55}$$

Esta série converge desde que $|z - z_+| < |z_+ - z_-|$, que é uma condição evidente se você fizer um esboço da localização dos pólos e de qual é o raio de convergência para z. Neste caso o resíduo da função $f(z)$ em z_+ é $1/(z_+ - z_-)$. Note que se você escrever a série de Laurent para $f(z)$ ao redor do ponto z_-, ela será *diferente* da que acabamos de obter, possuindo uma outra região de convergência.

Considere uma função $f(z)$ com singularidades isoladas em z_k, $k = 1, 2, \dots, N$. Se a parte principal de $f(z)$ em cada um desses pontos for $f_k(z)$, então a função $f(z) - \sum_{k=1}^{N} f_k(z)$ é analítica em todo o interior de $\mathcal{C}$, e assim temos, pelo teorema de Cauchy

$$\oint_{\mathcal{C}} \left(f(z) - \sum_{k=1}^{N} f_k(z) \right) dz = 0 \Longrightarrow \oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = \sum_{k=1}^{N} \oint_{\mathcal{C}} f_k(z) dz \qquad (56)$$

Aqui cabe uma observação: cada uma das partes principais $f_k(z)$ de $f(z)$ possui uma série de Laurent que é válida em uma bola perfurada no ponto z_k, mas que certamente possui um raio de convergência específico. Ao subtrairmos as partes principais de $f(z)$ não estamos necessariamente usando essa série de Laurent, apenas o fato de que existem funções com singularidades isoladas em cada um dos z_k que permitem "subtrairmos" a parte não-analítica de $f(z)$.

Para calcular cada uma das integrais basta considerar um pequeno circuito ao redor de cada uma delas, expandir as $f_k(z)$ em série de Laurent e integrar termo a termo. O resultado é simples [veja os exercícios] e obtemos

$$\oint_{\mathcal{C}_k} f_k(z) dz = 2\pi i c_{-1}^{(k)} \equiv 2\pi i \text{Res}(f_k(z); z_k) \qquad (57)$$

onde $\text{Res}(f_k(z); z_k)$ é o resíduo de $f_k(z)$ no ponto z_k. Este é o famoso teorema do resíduo de Cauchy, que é de extrema importância no cálculo de integrais indefinidas.

2.4.1 Exemplos de aplicação do teorema do resíduo

Vamos resolver a integral que propusemos no início da aula

$$I(a) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + a\cos\theta} d\theta \qquad 0 < a < 1 \qquad (58)$$

Para usarmos o teorema do resíduo, primeiro escreva $\cos\theta = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})/2 = (z + 1/z)/2$. Em termos da variável z a integral $I(a)$ é uma integral pelo circuito circular dado por $e^{i\theta}$, com $0 < \theta < 2\pi$. Como $dz = ie^{i\theta}d\theta$, a integral fica

$$I(a) = \int_{\mathcal{C}} \frac{-iz^{-1}}{1 + a(z + 1/z)/2} dz = -\int_{\mathcal{C}} \frac{2i}{az^2 + 2z + a} dz \tag{59}$$

Os pólos do integrando se encontram em $z_{\pm} = -1/a \pm (1 - a^2)^{1/2}/a$. Usando a representação $a = \sin\alpha$, para $0 < \alpha < \pi/2$, obtemos $z_+ = -\tan\alpha/2$ e $z_- = -\cot\alpha/2$, ou seja, apenas z_+ se encontra no interior de $\mathcal{C}$. O teorema do resíduo dá, então

$$I(a) = -2i \times 2\pi i \mathrm{Res}(f(z); z_+) = 2\pi(1 - a^2)^{-1/2} \ . \tag{60}$$

2.5 Exercícios

1. Calcule $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$.

2. Use a parametrização do caminho $\mathcal{C}$ para mostrar que $\oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} dt$. Calcule esta integral.

3. Uma outra maneira de provar o teorema de Cauchy, baseado em ferramentas que você provavelmente conhece é a seguinte. Escreva $\oint_{\mathcal{C}} f(z)dz = \oint_{\mathcal{C}}(u + iv)(dx + idy)$.

   (a) Escreva a parte real e imaginária da integra acima.

   (b) Aplique o teorema de Green [5] e as condições de Cauchy-Riemann para mostrar o teorema de Cauchy. Mais uma vez fica claro por que a função $f(z)$ tem que ser analítica no interior do circuito $\mathcal{C}$

4. O teorema de Morera diz que se $\oint_{\mathcal{C}} f(z)dz = 0$ para qualquer $\mathcal{C}$ em uma certa região, então $f(z)$ é analítica. Mostre este teorema. [sugestão: use a definição de função analítica].

5. Mostre que os coeficientes c_k na expansão em série de potências para uma função analítica são dados por $c_k = f^{(k)}(a)/k!$.

6. Suponha que um polinômio $P(z)$ não se anula para nenhuma valor de z. Mostre que isso significa que a função $f(z) = 1/P(z)$ é limitada e conclua, pelo teorema de Liouville, que $P(z)$ tem que se anular para alguma valor de z.

7. Considere $\mathcal{C}$ um circuito circular de raio δ ao redor de z_0. Mostre que $\oint_{\mathcal{C}} \frac{1}{(z - z_0)^n} dz$ é 0 se $n \neq -1$, e $2\pi i$ se $n = -1$.

[5] O teorema de Green diz que: $\int_{\mathcal{C}} Pdx + Qdy = \int\int_{\mathcal{R}} (\partial_x Q - \partial_y P) dxdy$.

8. Use o teorema do resíduo para calcular $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$.

9. Calcule $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$.

3 Aula 3

3.1 Aplicações a mecânica dos fluidos

Começaremos agora as aplicações dos métodos de variáveis complexas a problemas em física. Para isso vamos fazer uma rápida revisão de algumas idéias básicas da teoria de fluidos ideais incompressíveis.

Um fluido ideal é um fluido que não possui nenhuma viscosidade. Isso significa que o fluido não oferece nenhuma resistência a movimentos de cisalhamento. O fato de o fluido ser incompressível significa que a sua densidade ρ não varia de ponto a ponto.

Existem duas maneiras de se descrever o movimento de um fluido, a descrição de Lagrange e a descrição de Euler. Na descrição de Lagrange acompanhamos a trajetória de um pequeno elemento do fluido, ou seja, estudamos a função $\vec{r}(t)$ para um elemento do fluido. Já na descrição de Euler ficamos parados em um ponto do espaço e escrevemos o campo de velocidade naquele ponto, que corresponde a estudar a função $\vec{v}(\vec{r}, t)$.

Referências

[1] F. Dyson