# 1 Convenção de Einstein, e tensores de Levi-Civita e Kronecker

Em aula apresentamos alguns conceitos simples, que vocês já conhecem de cursos anteriores, mas de uma forma que talvez você não tenha visto antes. Nesta nota complementamos o livro, explicando a convenção de Einstein, os tensores de Levi-Civita e Kronecker, e algumas de suas propriedades elementares.

Como vimos, o produto escalar de dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é dado por

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \equiv a_1 b_1 + a_2 + b_2 + a_3 b_3 = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i = ab \cos\theta \tag{1}$$

onde $a$ e $b$ são os comprimentos de $\vec{a}$ e $\vec{b}$, e $\theta$ é o ângulo entre esses dois vetores. Aqui podemos introduzir o tensor de Kronecker $\delta^{ij}$, definido da seguinte maneira

$$\delta^{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = j \\ 0 & \text{se} \quad i \neq j \end{cases} \tag{2}$$

Depois explicaremos o que quer dizer que é um tensor, no momento não se preocupe com isso. Assim a soma que define o produto escalar pode ser reescrita assim

$$\sum_{i=1}^{3} a_i b_i = \sum_{i,j} \delta^{ij} a_i b_j \tag{3}$$

onde está implícito que a soma nos índices $i$ e $j$ vai de 1 a 3. A partir da maneira que definimos o delta de Kronecker, fica claro que sempre $i \neq j$ o termo não contribui, restando apenas os termos $i = j$, o que fornece a expressão do produto escalar.

Vamos introduzir a **convenção de Einstein** da soma, segundo a qual sempre estará implícita uma soma sempre que houver índices repetidos. Neste caso, temos

$$\sum_{i=1}^{3} a_i b_i = \sum_{i,j} \delta^{ij} a_i b_j = \delta^{ij} a_i b_j \tag{4}$$

Parece que complicamos as coisas, em vez de simplificar. Mas você verá no decorrer do curso que o tensor de Kronecker é muito útil.

Ao introduzir o produto vetorial de dois vetores, fomos levados naturalmente a conisderar um objeto de três índices, $\epsilon^{ijk}$, que possui as seguites propriedades: $\epsilon^{123} = 1$, e $\epsilon^{ijk} = -\epsilon^{jik} = -\epsilon^{ikj}$. Assim, utilizando a convenção de Einstein, temos para o produto vetorial

$$(\vec{a} \times \vec{b})^i = \epsilon^{ijk} a_j b_k \tag{5}$$

Calculemos o comprimento deste vetor. Sabemos que $|\vec{c}|^2 = \vec{c} \cdot \vec{c}$, ou seja

$$\vec{c} \cdot \vec{c} = \delta^{ij} c_j c_j = \epsilon^{ijk} a_j b_k \epsilon^{imn} a_m b_n \tag{6}$$

A expressão parece complicada, mas podemos simplificar $\epsilon^{ijk}\epsilon^{imn}$. Em primeiro lugar, note que para um dado valor de $i$, os índices $j$ e $k$ devem ser diferentes dele. Por exemplo, se $i = 1$, então $j$ e $k$ devem ser 2 e 3, ou 3 e 2. O mesmo vale para o par $m$, $n$, o que implica em $\{j, k\}$ ser o igual a $\{m, n\}$. Qualquer outro caso implica imediatamente em $\epsilon^{ijk}\epsilon^{imn} = 0$. Suponhamos que $(j, k) = (m, n) = (2, 3)$. Assim, temos

$$\epsilon^{i23}\epsilon^{i23} = \epsilon^{123}\epsilon^{123} = 1.1 = 1 \tag{7}$$

No caso em que $(j, k) = (n, m) = (2, 3)$, temos

$$\epsilon^{i23}\epsilon^{i32} = \epsilon^{123}\epsilon^{132} = 1.(-1) = -1 \tag{8}$$

ou seja, se os pares estão na mesma ordem, o resultado é 1, caso contrário é $-1$. Podemos combinar essas informações de uma forma compacta, usando o delta de Kronecker: considere $T^{jknm} = \delta^{jm}\delta^{kn} - \delta^{jn}\delta^{km}$. Note que se o par $\{j, k\}$ for diferente do par $\{m, n\}$, então $T^{jknm} = 0$. Verifique agora que as duas propriedades que apresentamos antes são satisfeitas por $T^{jknm}$. Isso significa que

$$\epsilon^{ijk}\epsilon^{imn} = \delta^{jm}\delta^{kn} - \delta^{jn}\delta^{km} \tag{9}$$

Essa fórmula é muito útil, e vale a pena você se esforçar para entendê-la. Vamos aplicá-la no cálculo do comprimento do vetor $\vec{c}$. Temos

$$\begin{aligned}
\vec{c} \cdot \vec{c} &= \delta^{ij} c_j c_j = \epsilon^{ijk} a_j b_k \epsilon^{imn} a_m b_n \\
&= (\delta^{jm}\delta^{kn} - \delta^{jn}\delta^{km}) a_j b_k a_m b_n \\
&= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = a^2 b^2 (1 - \cos^2\theta) \\
&= a^2 b^2 \sin^2\theta
\end{aligned} \tag{10}$$

Antes de terminarmos, devemos explicar por que chamamos esses objetos de tensores. Como você pode ter visto em algum outro curso (métodos matemáticos ou relatividade), um tensor é um objeto matemático, cujas componentes se transformam de uma certa maneira. É fácil mostrar que, de fato, os tensores de Levi-Civita e Kronecker se transformam como tensores sob o grupo de rotações. Mas isso não é algo importante neste ponto do curso, e se não faz muit o sentido agora, não se preocupe.