1 Produtos de Tensores de Levi-Civita

Em sala vimos uma identidade envolvendo o tensor de Levi-Civita, $\epsilon^{ijk}\epsilon^{imn} = \delta^{jm}\delta^{kn} - \delta^{jn}\delta^{km}$. Aqui vamos mostrar uma identidade mais geral do que essa, que pode ser útil neste e em outros cursos.

A primeira observação a fazer é que ϵ^{ijk} é não nulo somente quando os três índices são uma permutação qualquer que $\{1, 2, 3\}$. Assim, quando consideramos o produto $\epsilon^{ijk}\epsilon^{lmn}$, os índices $\{i, j, k\}$ e $\{l, m, n\}$ tem que ser permutações de $\{1, 2, 3\}$, ou seja, os índices $\{l, m, n\}$ são uma permutação de $\{i, j, k\}$.

Essa condição implica que cada um dos l, m e n tem que ser um dos $\{i, j, k\}$. Você poderia pensar que isso leva a uma identidade do tipo

$$\epsilon^{ijk}\epsilon^{lmn} \stackrel{?}{=} \delta^{il}\delta^{jm}\delta^{kn} \tag{1}$$

Essa condição diz que o lado direito é não nulo somente quando $i = l$, $j = m$ e $k = n$. Mas essa não é a única maneira para o lado esquerdo ser não nulo! O que devemos fazer é consertar essa expressão, introduzindo a antissimetria nos índices $\{l, m, n\}$, ou seja, devemos somar e subtrair termos de tal forma que o lado direito e esquerdo tenham a mesma simetria nos respectivos índices. Isso levaria a

$$\epsilon^{ijk}\epsilon^{lmn} = A(\delta^{il}\delta^{jm}\delta^{kn} - \delta^{il}\delta^{jn}\delta^{km} - \delta^{im}\delta^{jl}\delta^{kn} + \delta^{im}\delta^{jn}\delta^{kl} - \delta^{in}\delta^{jm}\delta^{kl} + \delta^{in}\delta^{jl}\delta^{kn}) \tag{2}$$

onde introduzimos uma constante arbitrária A para ajustar possíveis fatores numéricos. O lado direito dessa expressão tem a mesma simetria nos índices $\{l, m, n\}$, por construção. Na verdade você pode verificar que isso é verdade para os índices $\{i, j, k\}$ também. Qual é o valor de A? Para isso tome $i = l = 1$, $j = m = 2$ e $k = n = 3$, o que dá $A = 1$. Assim temos uma expressão que 1) tem as mesmas propriedades de simetria em relação a todos os índices que o produto inicial de dois tensores de Levi-Civita, e 2) tem o mesmo valor em um caso simples, $i = l = 1$, $j = m = 2$ e $k = n = 3$. Isso significa que as duas expressões são iguais. Assim obtemos a identidade

$$\epsilon^{ijk}\epsilon^{lmn} = \delta^{il}\delta^{jm}\delta^{kn} - \delta^{il}\delta^{jn}\delta^{km} - \delta^{im}\delta^{jl}\delta^{kn} + \delta^{im}\delta^{jn}\delta^{kl} - \delta^{in}\delta^{jm}\delta^{kl} + \delta^{in}\delta^{jl}\delta^{kn} \tag{3}$$

Note que se você fizer $i = l$ e somar em i, o resultado é a identidade que já discutimos em sala, $\epsilon^{ijk}\epsilon^{imn} = \delta^{jm}\delta^{kn} - \delta^{jn}\delta^{km}$ (verifique!).