Curso de Física Estatística - Pós-Graduação

1^a Lista - 2^0 semestre 2016

Justifique e discuta TODAS as suas respostas. Após obter cada resposta cheque se as unidades estão corretas, se os casos limites são físicos e discuta brevemente o significado físico da sua resposta.

1. (4.2 do H. Gould) Considere $N = 4$ spins não interagentes e com momento magnético μ que pode apontar paralelo ou anti-paralelo ao campo magnético B. Se a energia total é $E = -2\mu B$, quais são os estados acessíveis ao sistema? Considerando que todos os micro-estados são equiprováveis, qual a probabilidade de uma dado spin ser up ou down?

2. Obtenha o número total de microestados com energia menor que E, $\Phi(E)$, e a densidade de estados, $\Omega(E)$, para

   a) Uma partícula clássica livre em uma caixa de tamanho L em 2-D

   b) Uma partícula clássica livre em uma caixa de tamanho L em 3-D

   c) Comente as diferenças entre os itens a) e b)

   d) Considere uma partícula quântica livre em uma caixa de tamanho L em 1-D. No limite termodinâmico, onde os níveis de energia se tornam um contínuo obtenha $\Phi(E)$ e $\Omega(E)$. Compare com o caso clássico e mostre que as duas expressões são equivalentes quando $\delta x \delta p = h$ com $\delta x \delta p$ o volume da célula correspondente a um micro-estado no espaço de fases e h a constante de Planck.

3. (Salinas 2.3; Reif 2.2) Considere um sistema unidimensional clássico constituído por duas partículas não interagentes de mesma massa m . O movimento dessas partículas está restrito a uma região do eixo entre $x = 0$ e $x = L > 0$. Sejam x_1 e x_2 as coordenadas de posição das partículas e p_1 e p_2 os momentos canonicamente conjugados. A energia total desse sistema está entre E e $E + \delta E$.

   a) Desenhe a projeção do espaço de fase no plano definido pelas coordenadas de posição. Indique a região desse plano que é acessível ao sistema.

   b) Repita agora seus desenhos no plano definido pelas coordenadas de momento.

   c) Obtenha o número de micro-estados com energia menor que E, $\Phi(E)$:

   d) Obtenha a densidade de estados $\Omega(E)$

4. (Salinas 2.6) Desprezando toda a complexidade do espaço de fase clássico, considere um sistema de N partículas distinguíveis, muito fracamente interagentes, que podem ser encontradas em dois estados, com energia nula ou com energia $\epsilon > 0$, respectivamente.

   a) Dada a energia total U desse sistema, obtenha uma expressão para o número de estados microscópicos correspondentes $\Omega(U, N)$.

5. (Salinas 2.4) A posição de um oscilador harmônico clássico unidimensional é dada por $x(t) = Acos(wt+\phi)$ onde A, w e ϕ são constantes positivas.

   a) Calcule $p(x)dx$, a probabilidade de encontrar a posição do oscilador entre x e $x + dx$. Note que em uma oscilação, de período T, o oscilador passa um tempo dt no intervalo de x considerado, então

   $$p(x)dx = \frac{dt}{T}$$

   a) Faça um gráfico de p(x) como função de x.

   b) Raciocine agora em termos do espaço de fase clássico e de um ensemble de osciladores harmônicos unidimensionais, cujas energias estão no pequeno intervalo entre E e $E + dE$. (a região acessível no espaço de fase corresponde a uma coroa elíptica). Mostre que a probabilidade $p(x)dx$ também pode ser obtida por meio da razão entre a área da parte da coroa elíptica definida pelo intervalo entre x e $x+dx$ e a área total da coroa elíptica. Expresse $p(x)$ em termos de E e x.

c) Relacionando E com a amplitude A, mostre que o resultado é o mesmo que o obtido no item a. Este é um dos poucos exemplos onde podemos verificar a validade da hipótese ergódica e do postulado das probabilidades iguais a priori.

6. (Salinas 2.5 e exemplo 7) Considere um sistema clássico de N osciladores harmônicos localizados e interagindo fracamente, tal que a Hamiltoniana é:

$$H = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2m} p_j^2 + \frac{1}{2} k x_j^2,$$

com m a massa e k a constante elástica. Note que todos os osciladores tem a mesma frequência de oscilação. Esse é o modelo clássico para as vibrações elásticas de um sólido. Ele prevê um calor específico molar c (3R, com R a constante dos gases) que não varia com a temperatura e não depende da substância: Lei de Dulong e Petit, obtida por eles experimentalmente em 1819.

a) Obtenha o volume acessível do espaço de fase para $E \leq H \leq E + \delta E$

b) Obtenha a densidade de estados $\Omega(E)$

A lei de Dulong Petit funciona bem a altas temperaturas mas falha para alguns materiais (carbono e diamante) a temperatura ambiente. Para baixas temperaturas ela falha para todos os materiais, já que c diminue com T tendendo a zero. Em 1907 Einstein propôs uma versão quântica deste modelo na tentativa de explicar esta dependência com T (Planck's theory of radiation and the theory of the specific heat, Ann. d. Physik 22, 180 (1907)).

c) Escreva a energia total dos osciladores

d) Obtenha o número de microestados do sistema de N osciladores quânticos com energia total E.

Veremos que este modelo é capaz de explicar a diminuição de c com T, mas não da forma correta. É preciso levar em conta que as oscilações não tem todas a mesma frequência (modelo de Debye).

Problemas Extras

7. (Reif 2.4) Considere um sistema isolado de um grande número N de partículas de spin 1/2 localizadas e interagindo fracamente. Cada partícula tem um momento magnético μ que pode apontar paralelo ou anti-paralelo a um campo magnético H aplicado ao sistema. A energia do sistema é assim $E = -(n_1 - n_2)\mu H$ com n_1 o número de partículas paralelas ao campo e n_2 o número de partículas anti-paralelas ao campo.

a) Considere o intervalo de energia entre E e $E + \Delta E$ com ΔE pequeno comparado a E, mas microscopicamente grande tal que $\Delta E \gg \mu H$. Qual o número total de microestados $\Delta\omega(E)$ dentro deste intervalo.

b) Escreva uma expressão para $\ln \Delta\omega(E)$ como função de E. Simplifique usando a aproximação de Stirling na sua forma mais simples.

c) Assuma que a energia E está numa região onde $\ln \Delta\omega(E)$ é apreciável; não esta perto dos extremos $\pm N\mu$. Neste caso use a aproximação gaussiana no item a) para obter uma expressão simples para $\ln \Delta\omega(E)$

d) Comente brevemente a relevância da hipótese de que as partículas interagem fracamente na sua solução.