Curso de Física Estatística

1^a Lista - 2^o semestre 2013

Prof. Thiago R de Oliveira

Retirador do Cap. 1 do Reif ou Salinas ou Cap. 3 do Gould

Justifique e discuta TODAS as suas respostas. Após obter cada resposta cheque se as unidades estão corretas, se os casos limites são físicos e discuta brevemente o significado físico da sua resposta. Caso contrário uma percentual da nota será descontado

1. (Reif 1.1, Salinas 1.1) Qual é a probabilidade de fazer pelo menos seis pontos numa jogada de três dados ?

2. (Reif 1.2) Considere um jogo em que seis dados são jogados. Encontre a probabilidade de obter

   a) exatamente um dos dados com a face seis para cima.

   b) ao menos um dos dados com a face seis para cima.

   c) exatamente dois dados com a face seis para cima.

3. (Reif 1.5) No macabro jogo de roleta russa (absolutamente não recomendado), insere-se uma única bala no tambor de um revólver, deixando as outras cinco câmaras do tambor vazias. Roda-se o tambor, mira-se na própria cabeça e puxa-se o gatilho.

   a) qual é a probabilidade de ainda estar vivo depois de jogar este jogo N vezes ?

   b) qual é a probabilidade de sobreviver (N-1) vezes nesse jogo e depois ser morto na N-ésima vez que se puxa o gatilho?

4. (Reif 1.4) Um bêbado começa a caminhar a partir de um poste no meio de uma rua, dando passos de igual comprimento para a direita ou para a esquerda com igual probabilidade. Qual é a probabilidade de que o homem vá estar de novo no poste depois de N passos

   a) se N é par?

   b) se N é ímpar ?

5. (Reif 1.6) Considere uma caminhada aleatória em 1-D onde $p = q$ e $m = n_1 - n_2$ denota o deslocamento efetivo para a direita. Depois de N passos, calcule os seguintes valores médios : $< m >$, $< m^2 >$, $< m^3 >$ e $< m^4 >$.

6. (Gould 3.76) Para determinar a validade da distribuição gaussiana, considere os seguintes dois termos na série da expansão de $\mathrm{Ln}[P(n)]$:

$$\frac{1}{3!}(n-\tilde{n})^3 C + \frac{1}{4!}(n-\tilde{n})^4 D,$$

   com $C = d^3\mathrm{Ln}[P(n)]/d^3n$ e $D = d^4\mathrm{Ln}[P(n)]/d^4n$ calculados em $n = \tilde{n}$.

   a) Mostre que $|C| < 1/N^2p^2q^2$. O que ocorre se $p = q$?

   b) Mostre que os resultados para $|C|$ e $|D|$ implicam que negligenciar termos além de segunda ordem em $n - \tilde{n}$ é justificável se $|n - \tilde{n}| \ll Npq$.

   c) Explique porque é justificável parar em segunda ordem mesmo se $Npq \gg 1$.

7. (Reif 1.23)

   Considere o problema da caminhada aleatória de uma partícula em uma dimensão. Depois de N passos a partir da origem , a posição é dada por

   $x = \sum_{j=1}^{N} s_j$

onde $\{s_j\}$ é um conjunto de variáveis aleatórias independentes, identicamente distribuídas. Admita que em cada passo o deslocamento é sempre positivo, com probabilidades iguais de se situar em qualquer ponto no intervalo entre $\ell - b$ e $\ell + b$, com $0 < b < \ell$. **Em cada item deixe explicito, e discuta, onde a hipótese de eventos independentes esta sendo usada**

a) Normalize esta distribuição de probabilidades para um dado passo.

b) Esboce um gráfico dessa distribuição de probabilidade.

Após N passos:

c) Calcule o deslocamento médio $\overline{x}$ usando as regras de valores médio de somas e produtos de variáveis aleatórias?

d) Calcule a dispersão $\overline{(x-\overline{x})^2}$? (Use novamente as regras de valores médios de somas e produtos de variáveis aleatória. E não se esqueça de deixar explícito onde é usada, se for, a hipótese de passos (eventos) independentes.)

e) Qual a distribuição (ou densidade) de probabilidade da partícula estar na posição x após N passos? Não precisa fazer a conta explicitamente, mas justifique sua resposta.

f) Calcule novamente $\overline{x}$ e $\overline{(x-\overline{x})^2}$, integrando diretamente a distribuição de probabilidade do item anterior.

g) Esboce um gráfico desta distribuição de probabilidade $P(x)$

8. (Reif 1.14) Uma moeda é lançada para o alto 400 vezes. Encontre a probabilidade de obter 215 caras (sugestão: use a aproximação Gaussiana).

9. (Reif 1.9, Salinas 1.5) Mostrou-se que a probabilidade $W_N(n)$ de que um evento caracterizado pela probabilidade p ocorra n vezes em N tentativas é dada pela distribuição binomial

$$W_N(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n}$$

Considere a situação onde a probabilidade p seja pequena ($p << 1$) e onde estamos interessados no caso $n << N$ (Note que se N é grande, $W_N(n)$ se torna muito pequeno se $n \to N$, devido ao fator p^n, muito pequeno quando $p << 1$. Assim W(n) só será de fato apreciável quando $n << N$). Nesse caso, diversas aproximações podem ser feitas para reduzir a distribuição binomial a uma forma mais simples.

a) Usando o resultado $ln(1-p) \approx -p$ mostre que $(1-p)^{N-n} \approx e^{-Np}$

b) Mostre que $\frac{N!}{(N-n)!} \approx N^n$.

c) Mostre que a distribuição binomial se reduz a

$$W(n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

onde $\lambda = Np$ é o número médio de eventos. Esta é a distribuição de Poisson.

10. (Reif 1.16) Considere um gás de N_0 moléculas não-interagentes dentro de um volume V_0. Focalize a atenção em qualquer sub-volume V deste recipiente e denote por N o número de moléculas localizadas neste sub-volume. Cada molécula tem igual probabilidade de estar localizada em qualquer lugar dentro do recipiente, então a probabilidade de que uma dada molécula esteja localizada no sub-volume V é simplesmente $p = V/V_0$.

(a) Qual é a probabilidade de ter N moléculas dentro do sub-volume V e $N_0 - N$ fora dele ?

b) Qual é o número médio $\overline{N}$ de moléculas no sub-volume V (em termos de N_0, V_0 e V) ?

c) Qual é a dispersão relativa do número de moléculas localizadas em V: $\overline{(N-\overline{N})^2}/\overline{N}^2$?

d) O que acontece com a dispersão relativa quando $V \ll V_0$?

e) Qual o valor da dispersão quando $V \to V_0$? O resultado de c) concorda com esse valor esperado?

f) Para a caso de $N = 10^{23}$ estime a probabilidade de obter 0.01% mais moléculas do lado direito que do esquerdo.

g) Baseados nos resultados acima, justifique sucintamente porque não observamos o evento reverso da expansão livre: o gás que se expande pelo recipiente quando uma membrana que o mantinha em uma das metades é rompida, voltar a metade da caixa.

11. (Reif 1.11) Suponha que erros tipográficos cometidos por um digitador ocorram de modo completamente aleatório. Suponha que um livro de 600 páginas contenha 600 desses erros. Use a distribuição de Poisson para calcular a probabilidade

    a) de que uma página não contenha erros.

    b) de que uma página contenha ao menos 3 erros.

Problemas Extras

12. Faça o problema 3.45 do livro do Gould que está na pag. 145 do pdf que pode ser baixado em http://www.compadre.org/stp/items/detail.cfm?ID=7272

    Nesse problema você irá testar a aplicação do Teorema do Limite Central usando uma simulação que pode ser baixada em http://www.compadre.org/stp/items/detail.cfm?ID=8131

13. Faça o problema 3.30 do livro do Gould.

14. Faça o problema 3.77 do livro do Gould.