Curso de Física Estatística

2^a Lista - 2^0 semestre 2013

Capítulos 2 do Salinas ou Reif

Justifique e discuta TODAS as suas respostas. Após obter cada resposta cheque se as unidades estão corretas, se os casos limites são físicos e discuta brevemente o significado físico da sua resposta. Caso contrário uma percentual da nota será descontado

1. Duas variáveis aleatórias contínuas x e y, independentes uma da outra, são descritas por densidades de probabilidades $p(x)$ e $q(y)$.

   a) Obtenha a densidade de probabilidade $w(z)$ para a variável $z = x + y$

   b) Obtenha o valor médio $< z >$ e o segundo momento $< z^2 >$ em termos de $< x >$,$< y >$,$< x^2 >$ e $< y^2 >$.

2. Salinas 2.1 - Os núcleos dos átomos de certos sólidos cristalinos têm spin $s = 1$. De acordo com a teoria quântica, cada núcleo pode ter três estados quânticos de spin (com $m = +1$, 0 ou -1). Esse número quântico mede a projeção do spin nuclear ao longo do eixo cristalino do sólido. Como a distribuição de carga nuclear não é esfericamente simétrica, a energia do núcleo depende da orientação do seu spin em relação ao campo elétrico local. Assim, um núcleo nos estados $m = \pm 1$ tem energia $D > 0$ e um núcleo no estado $m = 0$ tem energia nula. O hamiltoniano de spin desse sistema de N núcleos localizados pode ser escrito na forma

$$H = D \sum_{j=1}^{N} S_j^2$$

   onde a variável de spin S_j pode assumir os valores +1, -1 ou 0. Mostre que o número de estados microscópicos acessíveis ao sistema com energia total U pode ser escrito como

$$\Omega(U, N) = \frac{N!}{(N - \frac{U}{D})!} \sum_{N_- = 0}^{U/D} \left[\left(\frac{U}{D} - N_- \right)! N_-! \right]^{-1} \tag{1}$$

   Faça a soma e mostre que

$$\Omega(U, N) = N!\, 2^{U/D} \left[\left(N - \frac{U}{D} \right)! \left(\frac{U}{D} \right)! \right]^{-1} \tag{2}$$

3. Salinas 2.3 (Reif 2.2) Considere um sistema unidimensional clássico constituído por duas partículas não interagentes de mesma massa m . O movimento dessas partículas está restrito a uma região do eixo entre $x = 0$ e $x = L > 0$. Sejam x_1 e x_2 as coordenadas de posição das partículas e p_1 e p_2 os momentos canonicamente conjugados. A energia total desse sistema está entre E e $E + \delta E$.

   a) Desenhe a projeção do espaço de fase no plano definido pelas coordenadas de posição. Indique a região desse plano que é acessível ao sistema.

   b) Repita agora seus desenhos no plano definido pelas coordenadas de momento.

   c) Obtenha o volume acessível do espaço de fase $\Omega(E)$:

   c) Obtenha a densidade de estados $\omega(E)$

4. Salinas 2.6 Desprezando toda a complexidade do espaço de fase clássico, considere um sistema de N partículas distinguíveis, muito fracamente interagentes, que podem ser encontradas em dois estados, com energia nula ou com energia $\epsilon > 0$, respectivamente.

a) Dada a energia total U desse sistema, obtenha uma expressão para o número de estados microscópicos correspondentes $\Omega(U, N)$.

b) Obtenha a densidade de estados $\omega(U)$

5. (Salinas 2.4) A posição de um oscilador harmônico clássico unidimensional é dada por $x(t) = Acos(wt + \phi)$ onde A, w e ϕ são constantes positivas.

   a) Calcule $p(x)dx$, a probabilidade de encontrar a posição do oscilador entre x e $x + dx$. Note que em uma oscilação, de período T, o oscilador passa um tempo dt no intervalo de x considerado, então

$$p(x)dx = \frac{dt}{T}$$

   a) Faça um gráfico de p(x) como função de x.

   b) Raciocine agora em termos do espaço de fase clássico e de um ensemble de osciladores harmônicos unidimensionais, cujas energias estão no pequeno intervalo entre E e $E + dE$. (a região acessível no espaço de fase corresponde a uma coroa elíptica). Mostre que a probabilidade $p(x)dx$ também pode ser obtida por meio da razão entre a área da parte da coroa elíptica definida pelo intervalo entre x e $x + dx$ e a área total da coroa elíptica. Expresse $p(x)$ em termos de E e x.

   c) Relacionando E com a amplitude A, mostre que o resultado é o mesmo que o obtido no item a. Este é um dos poucos exemplos onde podemos verificar a validade da hipótese ergódica e do postulado das probabilidades iguais a priori.

6. (Salinas 2.7) No modelo de gás de rede se divide o volume acessível às moléculas em V células de volume v_0. Cada célula pode estar vazia ou ocupada por uma única partícula. Encontre o número de maneiras de distribuir N partículas distinguíveis entre as V células ($0 \leq N \leq V$). Como sua resposta seria alterada se as partículas fossem indistinguíveis?

7. Salinas 2.8 Os átomos de um sólido cristalino podem ocupar uma posição de equilíbrio, com energia nula, ou uma posição deslocada, com energia $\epsilon > 0$. A cada posição de equilíbrio corresponde uma única posição deslocada.

   a) Dados o número N de átomos e a energia total U, calcule o número de estados microscópicos acessíveis ao sistema.

8. (Salinas 2.5 e exemplo 7) Considere um sistema clássico de N osciladores harmônicos localizados e interagindo fracamente, tal que a Hamiltoniana é:

$$H = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2m} p_j^2 + \frac{1}{2} k x_j^2,$$

   com m a massa e k a constante elástica. Note que todos os osciladores tem a mesma frequência de oscilação. Esse é o modelo clássico para as vibrações elásticas de um sólido. Ele prevê um calor específico molar c (3R, com R a constante dos gases) que não varia com a temperatura e não depende da substância: Lei de Dulong e Petit, obtida por eles experimentalmente em 1819.

   a) Obtenha o volume acessível do espaço de fase para $E \leq H \leq E + \delta E$

   b) Obtenha a densidade de estados $\omega(E)$

   A lei de Dulong Petit funciona bem a altas temperaturas mas falha para alguns materiais (carbono e diamante) a temperatura ambiente. Para baixas temperaturas ela falha para todos os materiais, já que c diminue com T tendendo a zero. Em 1907 Einstein propôs uma versão quântica deste modelo na tentativa de explicar esta dependência com T (Planck's theory of radiation and the theory of the specific heat, Ann. d. Physik 22, 180 (1907)).

   c) Escreva a energia total dos osciladores

   d) Obtenha o número de microestados do sistema de N osciladores quânticos com energia total E.

Veremos que este modelo é capaz de explicar a diminuição de c com T, mas não da forma correta. É preciso levar em conta que as oscilações não tem todas a mesma frequência (modelo de Debye).

Problemas Extras

9. (Reif 2.4) Considere um sistema isolado de um grande número N de partículas de spin 1/2 localizadas e interagindo fracamente. Cada partícula tem um momento magnético μ que pode apontar paralelo ou anti-paralelo a um campo magnético H aplicado ao sistema. A energia do sistema é assim $E = -(n_1 - n_2)\mu H$ com n_1 o número de partículas paralelas ao campo e n_2 o número de partículas anti-paralelas ao campo.

   a) Considere o intervalo de energia entre E e $E + \delta E$ com δE pequeno comparado a E, mas microscopicamente grande tal que $\delta E \gg \mu H$. Qual o número total de microestados $\Omega(E)$ dentro deste intervalo.

   b) Escreva uma expressão para $ln\Omega(E)$ como função de E. Simplifique usando a aproximação de Stirling na sua forma mais simples.

   c) Assuma que a energia E está numa região onde $\Omega(E)$ é apreciável; não esta perto dos extremos $\pm N\mu$. Neste caso use a aproximação gaussiana no item a) para obter uma expressão simples para $\Omega(E)$

   d) Comente brevemente a relevância da hipótese de que as partículas interagem fracamente na sua solução.

10. (Exercício retirado do curso do Prof. Brum) Utilize o programa SensitivityToInitial-Conditions. (a) Rode o programa nas condições iniciais. Descreva) Como se explica, no Universo normal, aquele em que vivemos, o fato que a entropia do Universo está aumentando mas, no entanto, após o Big-Bang, estrelas se formaram e mundos sendo formados inclusive com planetas como a Terra apresentando um processo evolutivo onde espécies adquirem complexidade crescente. o movimento das partículas. (b) Rode o programa utilizando a tecla Perturb e descreva novamente o movimento das partículas. (c) Rode o programa com Perturb e reverta o movimento após um tempo t ¡ 5.0. O sistema retorna a condição inicial? O movimento é reversível? (É mais fácil acompanhar a dinâmica do movimento rodando o programa utilizando a tecla Step) (d) Rode o programa da mesma forma que em c) mas esperando um tempo maior para reverter a direção do tempo. Faça vários testes. Discuta o resultado. (e) Altere a força da perturbação (perturbation strength) e repita o exercício. O que você conclui do resultado?

11. (Exercício retirado do curso do Prof. Brum) Vamos considerar dois trabalhos literários que exploram a ideia da reversão temporal: o pequeno romance (A) The Curious Case of Benjamin Button de F. Scott Fitzerald (escrito em 1921) (que possui uma versão cinematográfica dirigida por David Fincher) e o livro de ficção científica (B) Counter-Clock World de Philip K. Dick (escrito em 1964). No caso (A), o personagem principal, Benjamin Button, nasce velho e seu relógio biológico anda para trás, terminando sua vida como um bebê. Mas apenas ele sofre esse efeito. No caso (B), o mundo todo (podemos dizer, o universo) passa por uma reversão temporal (fase de Hobart, no filme). Com isso, tudo anda em reverso, com as pessoas nascendo nos seus túmulos, envelhecendo ao reverso, os livros sendo apagados nas livrarias, etc, e as pessoas morrendo como crianças/bebês. Discuta as seguintes questões sob a perspectiva das duas primeiras leis da termodinâmica e sob a perspectiva de estados microscópicos, configurações, estados macroscópicos, etc: a) Como se explica, no Universo normal, aquele em que vivemos, o fato que a entropia do Universo está aumentando mas, no entanto, após o Big-Bang, estrelas se formaram e mundos sendo formados inclusive com planetas como a Terra apresentando um processo evolutivo onde espécies adquirem complexidade crescente. b) Discuta o caso (A) e (B) em termos das duas primeiras leis da termodinâmica, em particular, discuta as diferenças e, a seu ver, a possibilidade teórica desses eventos acontecerem. Há alguma lei física sendo violada em algum dos casos? Explique.

12. De três exemplos de sistemas onde a hipótese ergódica falha e explique a origem da falha.