

# Curso de Física Estatística

## 3ª Lista -

Capítulos 2 do Salinas e Reif

**Justifique e discuta TODAS as suas respostas. Após obter cada resposta cheque se as unidades estão corretas, se os casos limites são físicos e discuta brevemente o significado físico da sua resposta. Caso contrário uma percentual da nota será descontado**

Nos problemas abaixo considere como dada a expressão para o volume acessível no espaço de fase para um gás ideal com  $N$  partículas, com energia total entre  $E$  e  $E + \delta E$ , contido em um volume  $V$ :

$$\Omega(E, V, N) = \frac{1}{2N!} C_{3N} V^N (2m)^{3N/2} E^{(3N/2-1)} \delta E,$$

onde  $C_{3N} = N^{-\frac{3N}{2}} b^N$ , com  $b$  constante e  $\delta E$  constante (muito menor que  $E$ ).

1. Considere um gás ideal de  $N$  partículas ( $N \gg 1$ ). Usando a definição de entropia total  $S$  e a expressão para  $\Omega$ , e identificando a energia interna  $U$  com  $E$ , obtenha  $U$  em função da temperatura.
2. Considere dois gases ideais monoatômicos clássicos, com  $N_1$  e  $N_2$  partículas, respectivamente, inicialmente separados por uma parede adiabática, fixa e impermeável. O sistema total está isolado, de modo que a energia total é fixa:  $E_0 = E_1 + E_2$ . Se a parede é substituída por uma parede diatérmica, fixa e impermeável, o sistema atingirá um novo estado de equilíbrio, o gás 1 ficará com a nova energia  $E'_1$  e o gás 2, com  $E'_2$ .
  - a) Escreva a expressão para o volume acessível ao sistema composto no espaço de fase,  $\Omega(E_0, E'_1)$ , quando o gás 1 está com energia  $E'_1$ .
  - b) Sendo a probabilidade do gás 1 ter energia  $E'_1$  igual a  $P(E'_1) = c\Omega(E_0, E'_1)$ , maximize  $\ln P(E'_1)$  em relação a  $E'_1$  e encontre a condição de máximo em termos das energias mais prováveis  $\tilde{E}_1$  e  $\tilde{E}_2$  e dos números de partículas.
  - c) Identificando os valores mais prováveis da energia com a energia interna termodinâmica, escreva de novo a condição do item b), obtendo a condição usual de equilíbrio térmico.
  - d) Mostre que a flutuação da energia por partícula varia com  $1/\sqrt{N}$  e portanto tende a zero para sistemas macroscópicos, onde  $N \rightarrow \infty$ , justificando assim a identificação dos valores mais prováveis com as variáveis macroscópicas no equilíbrio termodinâmico.
3. Considere um sistema isolado, de volume  $2V$ , composto por dois subsistemas, cada um ocupando um volume  $V$ , separados por uma partição. Cada subsistema é um gás ideal de  $N$  partículas, à mesma temperatura  $T$ , com energia  $E = 3/2 N k_B T$ .
  - (a) Calcule a entropia total  $S_i$  de cada gás ( $i = 1, 2$ ).
  - (b) Se os dois gases são o mesmo gás, a entropia  $S$  do sistema composto deve ser igual a entropia do sistema composto sem a partição (um gás ideal de  $2N$  partículas à temperatura  $T$  em um volume  $2V$ ). Calcule esta entropia.
  - (c) A entropia do sistema composto também deve ser dada por  $S = S_1 + S_2$  (aditividade da entropia). Calcule  $S - (S_1 + S_2)$  (sendo os gases iguais) e mostre que o resultado é  $2N k_B \ln 2$  (não dá zero como deveria). Este é o paradoxo de Gibbs. Como se pode explicar isto?
4. Considere dois sistemas isolados de spins  $1/2$  não interagentes. Um deles tem 4 spins ( $N_A = 4$ ) e o outro tem 10 ( $N_B = 4$ ).
  - a) Qual o número total de microestados de cada sistema? E do sistema composto  $A + B$ ?

Considere agora que cada sistema está em um campo magnético  $B$  e de alguma maneira fixamos a energia de cada um deles, sendo  $E_A = -2\mu B$  e  $E_B = -2\mu B$ . A hamiltoniana fica  $H = -\mu B \sum_i \sigma_i$  com  $\sigma_i = \pm 1$

b) Nesse caso onde a energia de cada sistema é fixa, qual o número de microestados total do sistema composto  $A + B$ . Compare com o obtido no item a) e explique.

c) Comente brevemente sobre a importância da hipótese de que os sistemas não interagem na resposta do número de microestado total do sistema obtida no item anterior.

d) Se colocamos os dois sistemas em contato e permitimos a troca de energia, qual a probabilidade do sistema A continuar tendo energia  $E_A = -2\mu B$

e) Qual o valor mais provável de  $E_A$  e  $E_B$ . Qual o significado físico desse valor mais provável

f) O que ocorre com as flutuações na energia quando aumentarmos o número de partículas em cada sistema?

g) Qual o macroestado mais provável para o sistema composto? Explique.

5. (Salinas 4.1) Considere um modelo de  $N$  íons magnéticos localizados, definido pelo hamiltoniano de spin

$$H = D \sum_{j=1}^N S_j^2$$

onde a variável  $S_j$  pode assumir os valores  $-1, 0, +1$ , para qualquer  $j$ . Dada a energia total  $E$ , utilize a expressão do número de estados microscópicos acessíveis ao sistema,  $\Omega(E, N)$ , para obter a entropia por partícula,  $s = s(u)$ , onde  $u = E/N$ . Obtenha uma expressão para o calor específico  $c$  em função da temperatura  $T$ . Esboce um gráfico de  $c$  contra  $T$ , verificando o máximo arredondado característico do efeito Schottky. Escreva agora uma expressão para a entropia como função da temperatura. Quais os valores limites da entropia para  $T \rightarrow 0$  e para  $T \rightarrow \infty$ ?

6. (Salinas 4.2) No modelo do sólido de Einstein, poderíamos introduzir uma coordenada de volume supondo, de maneira fenomenológica, que a frequência fundamental  $\omega$  seja uma função de  $v - V/N$  da forma

$$\omega = \omega(v) = \omega_0 - A \ln \left( \frac{v}{v_0} \right),$$

onde  $\omega_0$ ,  $A$  e  $v_0$  são constantes positivas. Obtenha expressões para o coeficiente de dilatação e a compressibilidade isotérmica desse modelo.

7. (Salinas 4.3) A exemplo do que foi feito no problema anterior, podemos introduzir o volume no modelo do gás de partículas com dois níveis de energia supondo que

$$\epsilon = \epsilon(v) = \frac{a}{v^\gamma},$$

onde  $a$  e  $\gamma$  são constantes positivas. Obtenha uma equação de estado para a pressão da forma  $p = p(T, v)$  e uma expressão da compressibilidade isotérmica (note que a constante  $\gamma$  desempenha o papel do parâmetro de Grüneisen de um sólido).

8. (Salinas 4.4) O número total de estados microscópicos acessíveis ao gás de Boltzmann, com energia  $E$  e número de partículas  $N$ , pode ser escrito na forma

$$\Omega(E, N) = \sum_{N_1, N_2, \dots} \frac{N!}{N_1! N_2! \dots}$$

com as restrições  $\sum_j N_j = N$  e  $\sum_j \epsilon_j N_j = E$ . Escreva uma expressão formal para a entropia, no limite termodinâmico, em termos da distribuição de valores dos números de ocupação no equilíbrio. Mostre que a entropia depende da temperatura de acordo com um termo do tipo  $-K_B T \ln T$ .

9. (Salinas 4.5) Considere um gás de rede constituído por  $N$  partículas distribuídas em  $V$  células (com  $N \leq V$ ). Suponha que cada célula possa estar vazia ou ocupada por uma única partícula. O número de estados microscópicos do sistema será dado por:

$$\Omega(E, N) = \frac{V!}{N!(V - N)!}$$

- a) Obtenha a entropia por partícula  $s(v)$ , onde  $v$  é o volume médio por partícula, dado por  $v = V/N$ .
- b) A partir da equação fundamental determinada no item anterior, obtenha a equação de estado para  $p/T$ .
- c) Escreva a equação do item anterior em termos do número médio de partículas por unidade de volume  $\rho = 1/v$ . Faça uma expansão em torno de  $\rho = 0$  (baixa densidade), calculando seus três primeiros termos não nulos. Esta é a expansão virial e os coeficientes dessa expansão são os coeficientes viriais do gás. Mostre que truncando a expansão em primeira ordem obtemos a lei de Boyle para gases ideais.