Curso de Física Estatística

6^a Lista - 1^0 semestre 2013

Prof. Thiago R Oliveira

1. (Reif 9.1) Considere um sistema consistindo de duas partículas, cada uma delas podendo estar em qualquer um de três estados quânticos, associados a energias 0, ϵ e 3ϵ. O sistema está em contato com um reservatório térmico a temperatura $T = (k_B\beta)^{-1}$

   (a) Escreva uma expressão para a função de partição canônica Z se as partículas obedecem à estatítica clássica de MB e são consideradas distinguíveis.

   (b) Qual seria a expressão para Z se as partículas obedecessem a estatística de BE ?

   (c) Qual seria a expressão para Z se as partículas obedecessem a estatística de FD ?

2. Mostre que o número de maneiras de distribuir N bósons idênticos em K estados é dado por

$$I_B = \frac{(K+N-1)!}{(K-1)!N!}$$

   Para férmions, mostre que este náumero é dado por

$$I_F = \frac{K!}{(K-N)!N!}$$

   $(N \leq K\ )$

3. Um gás ideal de N partículas idênticas, em um volume V, está em equilíbrio à temperatura T. A energia total do sistema E é dada por $E = \sum_j n_j\epsilon_j$, onde n_j é o número de ocupação do estado de partícula única de energia ϵ_j. O náumero de partículas $N = \sum_j n_j$ é fixo. Usando o ensemble canônico, re-obtenha a expressão já conhecida para o valor médio $< n_j >$ (Ver seção 9.3 Reif)

   (a) se as partículas do gás forem férmions.

   (b) se as partículas do gás forem bósons.

4. ($\sim$ Salinas 8.3) Mostre que um gás ideal de férmions, contido em um volume V, obedece à equação de estado :

   $PV = \frac{2U}{3}$

   Para isso:

   a) obtenha uma expressão para a pressão P, usando a conexão do ensemble grande canônico com a termodinâmica.

   b) Escreva uma expressão para a energia interna U como um somatório envolvendo os náumeros de ocupação médios $< n_j >$ de cada náivel de energia de partícula áunica ϵ_j.

   c) Desenvolva essas expressões. Para isso, no limite termodinâmico, transforme os somatórios em integrais em d^3k .

   d) Transforme as integrais em k em integrais na variável $\epsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$. Compare-as e mostre que $PV = \frac{2U}{3}$

   e) A partir da expressão para o grande potencial, no ensemble grande canônico, mostre que um gás ideal de bósons obedece à equação de estado :

$$PV = \frac{2U}{3}$$

5. Considere um gás de fótons em uma cavidade de volume V, em equilíbrio a temperatura T. A energia total pode ser escrita como $E = \sum_j n_j\epsilon_j$, onde n_j denota o náumero de ocupação do estado de partícula áunica de energia $epsilon_j$ Obtenha $< n_j >$, o náumero médio de ocupação de um estado de energia ϵ_j, usando o formalismo do ensemble canônico.

6. (Salinas 8.5, Reif 9.4) Um gás ideal de N átomos de massa m está contido em um recipiente de volume V, a uma dada temperatura T.

   a) Calcule o potencial químico desse gás no limite clássico (sugestão: imponha que $N =< N >$ no formalismo do ensemble grande canônico, usando a expressão da grande função de partição no limite clássico)

   b) Considere agora um "gás bidimensional", constituído por N_A partículas livres adsorvidas sobre uma superfície de área A. A energia de uma partícula adsorvida é dada por

$$\epsilon_A = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \epsilon_0$$

   onde $\vec{p}$ é o momento (bidimensional) e $\epsilon_0 > 0$ é a energia de ligação que mantém a partícula presa á superfície .

   No limite cássico, calcule o potencial químico μ_A do gás adsorvido.

   c) A condição de equilíbrio entre as partículas adsorvidas na superfície e as partículas do gás tridimensional pode ser expressa em termos dos respectivos potenciais químicos. Utilize essa condição para encontrar a densidade superficial de partículas adsorvidas em termos da temperatura e da pressão p exercida pelo gás envolvente.

$\Xi = \sum_j e^{-\beta E_j + \beta\mu N_j}$

$\Xi = \sum_{n_j} e^{-\beta \sum_j n_j \epsilon_j + \beta\mu \sum_j n_j}$

Para férmions(sinal +) ou bósons (sinal -): $ln\Xi = \pm \sum_j ln(1 \pm e^{-\beta(\epsilon_j - \mu)})$

$< n_j >= \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_j - \mu)} \pm 1}$

$\Phi = U - TS - \mu N = -k_B T ln\Xi = -PV$ $N =< N >= z\frac{\partial ln\Xi(\beta,z)}{\partial z}$ $U =< E >= -\frac{\partial ln\Xi(\beta,z)}{\partial \beta}$

Se $\epsilon_j = \epsilon_{(\vec{k},\sigma)} = \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m}$ e gás em volume V,

$$\sum_j f(j) \to \frac{\gamma V}{(2\pi)^3} \int d^3k f(\vec{k})$$

No limite clássico,

$$ln\Xi_{cl} = \sum_j e^{-\beta(\epsilon_j - \mu)}$$

Para um gás ideal, no limite clássico:

$$ln\Xi_{cl} = \sum_{\vec{k},\sigma} e^{-\beta(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu)}$$