

Teoria de Escola

Em torno dos anos 60 se percebeu que as grandezas formais tinham um comportamento mais simples como função das variáveis externas, perto do ponto crítico.

Essa simplificação leva o nome de Teoria de escola.

Perto do ponto crítico assumimos que a energia livre pode ser escrita como a soma de uma parte regular e bem comportada, $f_0(T, H)$, e uma parte singular, $f_s(T, H)$, que contém as anomalias do comportamento crítico.

E conveniente escrever f_s em função de $t = (T - T_c)/T_c$.

$$f(T, H) = f_0(T, H) + f_s(t, H)$$

A hipótese de escola é de que f_s depende de t e H numa combinação bem definida

$$f_s = t^{-\alpha} F(H/t^{\beta/\alpha})$$

F é chamado função de escola e é universal, tal como os expoentes críticos.

Essa hipótese considera que a função f_s é uma função homogênea

$$f_s(\lambda t, \lambda H) = \lambda f_s(\lambda^\alpha t, \lambda^\beta H)$$

Como se comporta por um rescalonamento dos parâmetros t e H

Como λ é arbitrário podemos escolher $\lambda^\alpha t = 1$ tal que $\lambda = t^{-1/\alpha}$ e

$$f_s = t^{-1/\alpha} f_s(1, H/t^{\beta/\alpha}) \\ = t^{-1/\alpha} F(H/t^{\beta/\alpha})$$

A partir das expressões de f podemos obter as partes singulares das grandezas termo dinâmicas

Pode-se mostrar que $s = -\frac{\partial f_s}{\partial t}$ e $m = -\frac{\partial f_s}{\partial H}$ em campo zero são

$$s(t, H=0) = \frac{1}{a T_c} t^{-\frac{1}{a}-1} F(0)$$

$$m(t, H=0) = -t^{-\frac{1}{a}-\frac{b}{a}} F'(0)$$

Assim temos que

$$\beta = -\left(\frac{1}{a} + \frac{b}{a}\right)$$

Do mesmo modo posso obter

$$\alpha = 2 + \frac{1}{a}$$

$$\gamma = 2b/a + 1/a$$

Vemos que a partir de dois números (a e b) podemos todos os expoentes óticos. Ou seja somente dois dos expoentes são independentes. Pode-se checar que

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2 \quad (\text{Rushbrooke})$$

Também pode-se mostrar que $\beta\alpha = \beta + \gamma$ (Widom)

Essas relações de escala são confirmadas por experimentos resultados exatos e cálculos numéricos.

Uma relação igual mas com desigualdade pode ser obtida a partir de argumentos termo dinâmicos

Note que podemos escrever

$$m(t, H) = t^\beta Y(H/t^\alpha)$$

com $\beta = b/a = \beta + \gamma$
Assim temos

$$\frac{m}{t^\beta} = Y(H/t^\alpha)$$

Então se plotarmos m/t^β versus H/t^α temos uma função universal $Y(x)$: diferentes sistemas no mesmo classe de universalidade terão a mesma curva.

Pode-se mostrar que a energia livre de London obedece a "formas" de escala

Analisando a função de correlação pode-se obter um terceiro lei de escala

$$\rho = v(2-\alpha) \quad (\text{Fisher})$$

Estas 3 leis de escala não dependem da dimensão do sistema. Isto deve ser mencionado pq existe um quarto lei de escala que depende da dimensão e por isso tem um status um pouco diferente. Esta lei é chamada de lei de hiper-escala e é dada por:

$$2-\alpha = \nu d \quad (\text{Yosephson})$$

Ela é obedecida para sistemas com $D < D_{\text{up}}$ com D_c o dimensão crítica superior ($D_{\text{up}} = 4$ p) classes de universalidade de Ising, XY e Heisenberg), e violada quando desta dimensão; os expoentes de campo médio (exatos p/ $D > 4$) não obedecem, exatamente em $D=4$

Com estas 4 leis de escoço, vemos que das 6 espécies criticas, somente 2 são independentes

As leis de escoço podem ser obtidas de modo simples usando análise dimensional e assumindo que um grande zo que tem dimensões L^{-p} é proporcional a ξ^p perto do ponto crítico: ξ é o único parâmetro de distâncias relevantes. (Ver Prob. 3.7 de Harvey Gould)

Construção de Kadanoff

Como vimos a hipótese de escoço (homogeneidade da energia livre) leva ao comportamento critico universal: leis de potências e espécies críticas

Mas como justificar, microscopicamente, esta hipótese? Essa pergunta começou a ser respondida nos anos 70 com as ideias do grupo de renormalização; estas ideias são importantes em diversas áreas incluindo mat. cond., físico de partículas, plasma e turbulência

Para introduzir a construção de Kadanoff vamos utilizar o modelo de Ising mais uma vez.

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j - H \sum_{i=1}^n \sigma_i$$

\hookrightarrow soma sobre primos vizinhos

Para obter Z precisamos somar sobre todos os possíveis configurações微观scópicas. Mas perto do ponto crítico o compr. de correlações ξ se torna muito maior que distância entre os spins: $\xi \gg a$

Assim spins próximos estão altamente correlacionados e seles vizinhos também são iguais entre si: temos conjuntos cada vez maiores de spins altamente correlacionados. Neste modo consideraremos blocos (ou cíclulos) de tamanho $b \ll \xi$ que contém b^d spins altamente correlacionados. Para cada um destas cíclulos temos uma nova variável de spin Θ_α , com $\alpha = 1, 2, \dots, N/b^d$. Os valores de Θ_α dependem dos valores de S_i dentro do bloco. Iremos assumir, ou imponer, um regras de tal modo que os valores de $\Theta_\alpha = \pm 1$; igual aos de S_i :

O novo sistema tem N' "spins" com

$$N' = b^{-d} N$$

Estes N' spins estão arranjados numa rede onde a distância entre os sites é

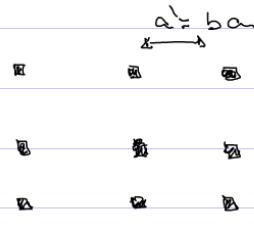
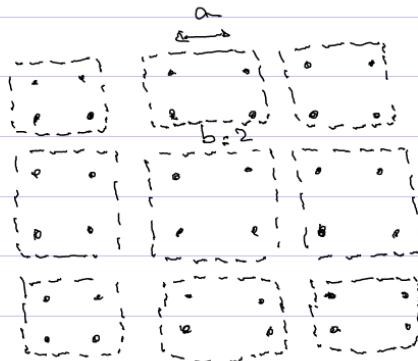
$$a' = ba$$

Para preservar a densidade dos graus de liberdade todos as distâncias espaciais são rescalados pelo fator b tal que (assim a nova rede continua com o mesmo parâmetro b)

$$r' = b^{-1} r$$

Em especial o comprimento de correlação é encolhido

$$\xi' = b^{-1} \xi$$



Podemos agrupar os spins de outros maneiras tb.

Assim assumimos que a nova Hamiltoniana do sist. tem a mesma forma da anterior

$$S\hat{H}' = - \bar{J}' \sum_{\langle \alpha, \beta \rangle} \theta_\alpha \theta_\beta - H' \sum_\alpha \theta_\alpha = S\hat{H}(n', \bar{J}', H')$$

mas com novos parâmetros \bar{J}' e H'

Lembrando que T_c depende de \bar{J} é assim a transformação de $\bar{J} \rightarrow \bar{J}'$ é equivalente a mudanças $t \rightarrow t'$.

O que fizemos no final foi uma mudança de escala, que imaginamos não alterou o sistema já que essa assim $S\hat{H}'$ deve ser similar a $S\hat{H}$, mas renormalizada (com novos parâmetros \bar{J}' , H')

Tb podemos entender isso transf. em termos de Z

$$Z = \sum_{\{\sigma_i\}} e^{-\beta H(\{\sigma_i\})}$$

Fazemos primeiro um somo sobre um subconjunto de $(N-N')$ spins e ficamos com um somo sobre os N' spins que consideramos poder ser escrita como

$$Z = \sum_{\{\theta_\alpha\}} e^{-\beta H'}$$

Se Z pode ser escrita desta forma esperamos que o comportamento ótico de $S\hat{H}$ e $S\hat{H}'$ sejam parecidos

Tb é natural imaginar que a energia livre do novo sistema é igual ao do original. Na verdade a parte sing. da energia livre deve-se a mesma

$$N' f_s(t', H') = N f_s(t, H)$$

Assim

$$f_s(t, H) = b^{-\alpha} f_s(t', H')$$

Perto do ponto crítico t, t', H e H' são pequenos
e assumimos que a relação entre eles é linear

$$t' = b^{\alpha_t} t$$

$$H' = b^{\alpha_H} H$$

O fato das constantes poderem ser escritas com b^α nem de que as const. de escola devem formam um semi-grupo

Logo

$$f_s(t, H) = b^{-\alpha} f_s(b^{\alpha_t} t, b^{\alpha_H} H)$$

Assim obtemos que f_s é uma função homogênea
Como b pode ser qualquer escalar $b^{\alpha_t} t = b_0^{\alpha_t} t$, ou
seja $b = b_0 t^{-1/\alpha_t}$ e temos

$$\begin{aligned} f(t, H) &= b_0^{-\alpha} t^{\alpha/\alpha_t} f(b_0^{\alpha_t}, b_0^{\alpha_H} H / t^{\alpha_H/\alpha_t}) \\ &= t^{\alpha/\alpha_t} F(H) t^\alpha \end{aligned}$$

Como esperado temos a forma de lei de escola e podemos obter os expoentes críticos em termos microscópicos a partir das transf de escola.

Assim a construção de todo mtf explico porque a energia livre é homogênea e portanto pq temos divergências com linhas de potêncio no ponto crítico. E como dito permite obter os expoentes críticos.

Além disso, conforme aplicarmos a transf de escala obtendo diferentes sistemas com $\tilde{s}^*(\tilde{S}, \tilde{H})$. Veremos que a transf. tem um ponto fixo onde

$$\tilde{g}' = b^{-1} \tilde{g} = \tilde{g}$$

OU seja no ponto fixo \tilde{g} é nulo ou infinito.

O ponto fixo onde \tilde{g} é nulo corresponde a uma fase estável.

E o ponto fixo onde $\tilde{g} = \infty$ corresponde a um ponto crítico do modelo. No ponto crítico uma transf de escala não altera o sistema. Ele tem uma simetria por "dilatações no espaço espacial", é invariante sobre a transf. de escala e portanto não existe uma escala de comprimento característica.

Assim a construção tb permite obter os pontos críticos e associa eles com $\tilde{g} = \infty$

O problema da construção é que em geral a forma de H não só preservado. Nesses termos irão aparecer: interações entre spins muito distantes, ou interações de mãos de dois corpos; $\tau_1 \tau_2 \tau_3$, por exemplo. Assim a transf. de escala gera um fluxo no espaço de parâmetros de H . Como a princípio qualquer forma que preserve a simetria de H pode aparecer esse espaço de parâmetros tem dimensão infinita.

Em geral é difícil obter a transf exatamente e temos que fazer aproximações

Se considerarmos $S^*(g_1, g_2, \dots)$ com g_i os parâmetros temos que a transf. de escala fixa

$$g_i' = R_b(g_i)$$

Perto do ponto crítico podemos linearizar a transf. e obter

$$g_i' = b^{x_i} g_i$$

O expoente x_i tem um papel relevante, já que se $x_i < 0$, o parâmetro $g_i' = b^{-|x_i|} g_i$ se torna menor a cada transf. Assim após um número grande de transf. ele se torna desprezível. Já quando $x_i > 0$ o parâmetro g_i' cresce e se torna importante. Assim fazemos a seguinte classificação para os g_i :

$x_i > 0$: g_i é chamado de variável relevante

$x_i < 0$: g_i é " " " irrelevante

$x_i = 0$: g_i é " " " marginal

Na verdade a linearização da transf. perto do ponto crítico "mistura" os g_i (g_i' pode depender dos outros g_i). Mas pode encontrar novos variáveis onde a transf. é diagonal e são esses novos parâmetros que devemos considerar.

Note tb que cada g_i' está associado a um operador em \mathcal{H} (J com $\Gamma_i \Gamma_{i+1}$, por exemplo) e assim a classificação se refere aos operadores.

Assim temos que no ponto crítico (pts fixos da transf. de escala) os g_i não mudam e \mathcal{H} é invariante de escala. Agora alteramos um pouco \mathcal{H} em alguma direção ($g_i \rightarrow g_i + \delta g_i$) e começamos a

aplicar transf. de escala podemos nos afastar do ponto crítico ou voltar a ele. Nós afastamos qnd $x_i > 0$ e o operador é relevante e nos aproximamos qnd $x_i < 0$.

O grupo de renormalização é este processo de aplicar transf. de escala e renormalizar os parâmetros de st. Ao contrário da const. de Kondo no ff consideramos os novos parâmetros livres. As transf. seriam um fluxo no espaço de parâmetros onde podemos identificar os pontos críticos.

Falta ainda explicar a universalidade do comportamento. Para isso devemos analisar o que ocorre com a energia livre na fase onde temos novos parâmetros que chamaremos de g_1, g_2, \dots . Mantemos os parâmetros t e H que sabemos ser relevantes.

Quando fazemos uma transf. temos

$$f_s(t, H, g_1, g_2, \dots) = \frac{t^{d/\lambda_t}}{b_0^d} f_s(b_0^{-\lambda_t}, b_0^{-\lambda_t} H/t^{\lambda_t/\lambda_t}, b_0^{-\lambda_t} g_1 t^{\lambda_t/\lambda_t}, \dots)$$

Se $\lambda_i < 0 \rightarrow g_i = b_0^{\lambda_i} g_i$ vai tender a 0 após muitas transf. Ou para t suficiente

$$g' = b_0^{\lambda_i} t^{\lambda_i/\lambda_t} g \approx 0$$

e

$$f_s(t, H, g_1, g_2) \approx \frac{t^{d/\lambda_t}}{b_0^d} f_s(b_0^{-\lambda_t}, b_0^{-\lambda_t} H/t^{\lambda_t}, 0, 0, \dots)$$

Assim vemos que suficientemente perto do ponto crítico o comportamento de f_s é governado somente pelos parâmetros (operadores) relevantes. Assum um sist que tem outros termos em seu st para

do ponto crítico o comportamento singular de f irá ser igual a de H com somente $T \circ H$.

Renormalização dos códigos de Ising em 1D

Vamos aplicar a construção de Kadanoff nos códigos de Ising que sabemos resolver exatamente.

$$f_1 = -J \sum_{i=1}^n \tau_i \tau_{i+1} - H \sum_{i=1}^n \tau_i$$

$$Z = \sum_{\{\tau_i\}} e^{-\sum \tau_i \tau_{i+1} + \sum \tau_i}$$

Há vários modos de "juntar" os spins em átomos.

Uma possibilidade é fazer uma soma sobre os spin pares e assim ficar somente com os ímpares.

Vamos adotar este procedimento fazendo uso do formalismo de matriz transferência.

$$\text{Temos } Z(T, H) = \text{Tr}[T^N]$$

Podemos agrupar os spins 2 a 2 fazendo $T' = T^2$

$$Z(T, H) = \text{Tr}[T'^{N/2}]$$

E conveniente introduzir as variáveis auxiliares

$$u = e^{-K} = e^{-H} \in [0, 1]$$

$$v = e^{-L} = e^{-PH} \in [0, 1]$$

Vamos nos resstringir a $H > 0$, já que temos a simetria $H \rightarrow -H$.

Temos que

$$T = \begin{pmatrix} u/v & u \\ u & v/u \end{pmatrix} \quad T^1 = T^2 = \begin{pmatrix} u^2 + \frac{1}{u^2+v^2} & v + \frac{1}{v} \\ v + \frac{1}{v} & u^2 + \frac{v^2}{u^2} \end{pmatrix}$$

Para que a forma de si e z não mude impõe

$$T' = C \begin{pmatrix} \frac{1}{w(v)} & w' \\ w' & v'(w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w^2 + \frac{1}{w^2+v^2} & v + \frac{1}{v} \\ v + \frac{1}{v} & w^2 + \frac{v^2}{w^2} \end{pmatrix}$$

Note que temos que énto de zero uma nova constante C'
 pois temos 3 eqs (matrizes são simétricas) e portanto precisamos
 de 3 incógnitas: $\bar{u}, \bar{\sigma}$ e C'

Resolvents as 3 eq.s acids obtained

$$v^1 = \frac{(u^2 + v^2)^{1/2}}{(u^2 + 1/g^2)^{1/2}}$$

$$w^1 = \frac{(\sigma + i\omega)^{1/2}}{(w^4 + 1/w^4 + \sigma^2 + i\omega^2)^{1/4}}$$

$$C = \left(\sigma + \frac{1}{\sigma} \right)^{1/2} \left(u^4 + \frac{1}{u^4} + \sigma^2 + \frac{1}{\sigma^2} \right)^{1/4}$$

Assim vemos que neste caso a forma de H se preserva e obtemos a funst. entre os parâmetros.

Podemos ver que estas transformações têm dois pontos fixos

$$1) \quad u^* = 0$$

8 *

$$\theta' = \sqrt{\theta^2} = \varphi$$

$$u' = \frac{(v + 1)^{1/2}}{(z + \frac{y}{\infty} + 2)^{1/2}} = 0$$

$$2) \quad u^* = 1$$

σ^4 = perolquear

$$\theta' = \sqrt{(\underline{1} + \theta^2)(\underline{1} + \frac{1}{\theta^2})} = \sqrt{\theta^2} = \theta$$

$$u^1 = \left[\frac{(v+1/\theta)^2}{2+v^2+1/\theta^2} \right]^{1/4} = 1$$

O ponto $(0,1)$ corresponde a $\beta J = \infty$ e $H = 0$ ou seja a $T = 0$ que é a temp. crítica

O ponto $(1,0)$ corresponde a $\beta J = 0$ e $H = \infty$ ou seja a $T = \infty$ e H qualquer que é a fase paramagnético fortemente desordenado

Além disso temos o ponto

$(u^*, \theta^*) = (0,1)$ é instável: pontos ligeiramente afastados tendem a se distanciar quando aplicamos a const. de escala

Na vizinhança de $(0,1)$ podemos linearizar a const. fazendo $u \ll 1$ e $\theta = 1 - w$ com $w \ll 1$. Assim

$$\theta^* = 1 - w^* = \frac{\sqrt{u^4 + (1-w)^2}}{\sqrt{u^4 + (1-w)^2}} \approx \sqrt{\frac{1-2w}{1+2w}} \approx (1-w)(1-w) \approx 1-2w$$

On se $w^* = 2w$

$$u^* = \frac{\sqrt{1-w + (1-w)^{-2}}}{[u^4 + \bar{u}^4 + (1-w)^2 + (1-w)^{-2}]^{1/4}} \approx \frac{\sqrt{2 + \theta(w^2)}}{[u^4 + \bar{u}^4 + 2 + \theta(w^2)]^{1/4}} \approx \frac{\sqrt{2}}{u^2 [u^8 + 3 + \theta(w^2)]^{1/4}}$$

$$u^* \approx \sqrt{2} u$$

Lembrando que $b=2$ e queremos algo no formato $t^* = b^{R^*} t$ escrevemos

$$w^* = 2^L w \rightarrow \lambda_w = L$$

$$u^* = 2^{\log_2 \sqrt{2}} u \rightarrow \lambda_u = \log_2 \sqrt{2} = 1/2$$

Assim confirmamos que o ponto critico $(0,1)$ é instável: já que os expoentes λ_w e $\lambda_u > 0$

Assim a constuição de todos os f_f permite identificar os pontos fixos. Alguns deles podem ser pares ou únicos

