

## Teoria de Escala

Como vimos a teoria de London prevê uma única classe de universalidade: um único valor para os expoentes. E sabemos que existem diversas classes de universalidade. Além disso a hipótese de que  $f$  pode ser expandido como série de potências perto de  $T_c$  é muito forte (a solução exata do Ising em 2D mostra que tal expansão, com coef. que são funções analíticas de  $T$ , não é possível)

Em 1965 B. Widom obteve uma generalização do eq. de van der Waals que permitia expoentes diferentes dos de campo médio. Além disso outros estudos sugeriram uma forma para a energia livre perto do ponto crítico. Essa simplificação levou o nome de teoria de escala

Perto do ponto crítico assumimos que a energia livre pode ser escrita como a soma de uma parte regular e bem comportado,  $f_0(T, H)$ , e uma parte singular,  $f_s(T, H)$ , que contém as anomalias do comportamento crítico. Note que a parte regular tem que ser finita mas não precisa ser contínua, já a parte singular deve divergir ou ter derivadas que divergem.

É conveniente escrever  $f_s$  em função do parâmetro adimensional

$$t = \frac{T - T_c}{T_c}$$

Assim temos

$$f(t, H) = f_0(t, H) + f_s(t, H)$$

A hipótese de escala é de que  $f_s$  depende de  $t$  e  $H$  numa combinação bem definida

$$f_s = t^{-1/a} F(H/t^{b/a})$$

$F$  é chamado função de escala e é universal, tal como os expoentes críticos ( $F$  pode ser  $\neq 0$  para  $t > 0$  e  $t < 0$ )

Essa hipótese considera que a função  $f_s$  é uma função homogênea:

$$f_s(t, H) = \lambda f_s(\lambda^a t, \lambda^b H) \quad \rightarrow \text{para qualquer valor de } \lambda$$

para qualquer valor de  $\lambda$ . Ele diz como  $f_s$  se comporta por um rescalamento dos parâmetros  $t$  e  $H$ . A forma de London para  $f$  leva a uma função homogênea, mas com expoentes  $a$  e  $b$  bem definidos; só podem assumir o valor de campo médio

Como  $\lambda$  é arbitrário podemos escolher  $\lambda^a t = 1$  tal que  $\lambda = t^{-1/a}$  e

$$f_s = t^{-1/a} f_s(1, H/t^{b/a})$$

$$f_s(t, H) = t^{-1/a} F(H/t^{b/a})$$

Note que obtemos a forma acima para uma particular transf. de escala  $t' = \lambda^a t = 1$

A partir das expressões de  $f$  podemos obter as partes singulares dos grandes termos dinâmicos

Pode-se mostrar que  $s = -\partial f_s / \partial T$  e  $m = -\partial f_s / \partial H$  em campo zero são

$$s(t, H=0) = \frac{1}{a T_c} t^{-1/a-1} F(0)$$

$$m(t, H=0) = -t^{-1/a-b/a} F'(0)$$

$$t = \frac{T-T_c}{T_c} \rightarrow dt = -1/T_c dT$$

$$\frac{\partial f}{\partial T} = -\frac{1}{T_c} \left\{ \frac{1}{a} t^{-1/a-1} F(H/t^{b/a}) + t^{-1/a} \frac{\partial F}{\partial t} \left( \frac{-b}{a} \right) \frac{H}{t^{b/a+1}} \right\}$$

$$\frac{\partial f}{\partial H} = t^{-1/a} \frac{\partial F}{\partial H} \frac{1}{t^{b/a}}$$

Lembrando que  $m \sim t^\beta$  obtemos

$$\beta = -\left( \frac{1}{a} + \frac{b}{a} \right)$$

O calor específico em campo nulo fica

$$c(t, H=0) = T \frac{\partial s}{\partial T} \Big|_{H=0} = T \left( \frac{-1}{T_c} \right) \left\{ \frac{1}{a T_c} \left( \frac{-1}{a} - 1 \right) t^{-1/a-2} F(0) \right\}$$

$$= \frac{T}{a T_c^2} \left( \frac{1+1}{a} \right) F(0) t^{-1/a-2}$$

E lembrando que  $c \sim t^{-\alpha}$ , temos

$$\alpha = 2 + 1/a$$

A susceptibilidade pode ser obtido

$$\chi(t, H) = \partial m / \partial H = - t^{-1/a - 2b/a} F''(H/t^{b/a})$$

e a campo nulo

$$\chi_0(t) = - t^{-1/a - 2b/a} F''(0)$$

Lembrando que  $\chi_0 \sim t^{-\gamma}$  temos

$$\gamma = 2b/a + 1/a$$

Vemos que a partir de dois números ( $a$  e  $b$ ) podemos ter todos os expoentes críticos. Ou seja somente dois dos expoentes são independentes. Pode-se checar que

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2 \quad (\text{Rushbrooke})$$

Estudando  $m(t=0, H)$  pode-se obter o expoente  $\delta$  e mostrar uma segunda lei de escala

$$\beta\delta = \beta + \gamma \quad (\text{Widom})$$

Essas relações de escala são confirmados por experimentos, resultados exatos e cálculos numéricos.

Uma relação igual nos como desigualdade pode ser obtido a partir de argumentos termo dinâmico

Note que podemos escrever

$$m(t, H) = t^\beta \gamma(H/t^\Delta)$$

com  $\Delta = b/a = \beta + \gamma$   
Assim temos

$$\frac{m}{t^\beta} = \gamma(H/t^\Delta)$$

Então se plotamos  $m/t^\beta$  versus  $H/t^\Delta$  temos uma função universal  $\gamma(x)$ : diferentes sistemas no mesmo classe de universalidade terão a mesma curva. Outro forma de ver a relação acima é que ao invés de termos uma relação entre variáveis,  $m$ ,  $H$  e  $t$ , temos uma relação entre somente duas variáveis,  $m/t^\beta$  e  $H/t^\Delta$ . Ou seja reduzindo  $m$  com  $t^\beta$  e  $H$  com  $t^\Delta$  reduzimos o número de variáveis.

Pode-se mostrar que a energia livre de London obedece a "forma" de escala (veja 12.10 do Pethica ou cap. 14 de Salinas)

Analisando a função de correlação pode-se obter uma terceira lei de escala

$$\gamma = \nu(2 - \eta) \quad (\text{Fisher})$$

Estas 3 leis de escala não dependem da dimensão do sistema. Isto deve ser mencionado pq existe uma última lei de escala que depende da dimensão e por isso tem um status um diferente. Esta lei é chamada de lei de hiper-escala e é dada por:

$$2 - \alpha = \nu d \quad (\text{Josephson})$$

Ela é obedecida para sistemas com  $D < D_{up}$  com  $D_c$  a dimensão crítica superior ( $D_{uc} = 4$  para classes de universalidade de Ising, XY e Heisenberg), e violada acima desta dimensão; os expoentes de campo médio (exatos para  $D > 4$ ) não obedecem, exatos exatamente em  $D = 4$ .

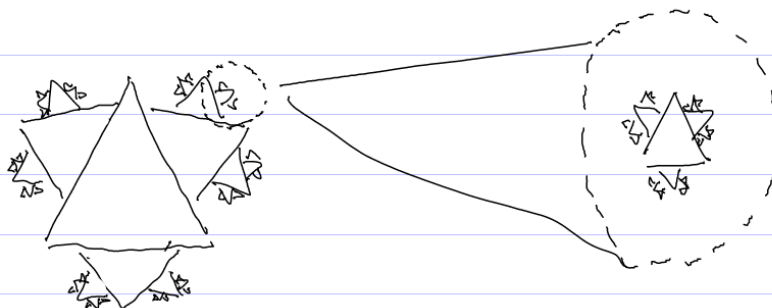
Com estas 4 leis de escala, vemos que dos 6 expoentes críticos, somente 2 são independentes

As leis de escala podem ser obtidas de modo simples usando análise dimensional e assumindo que um tamanho que tem dimensão  $L^{-D}$  é proporcional a  $\xi^{-D}$  perto do ponto crítico:  $\xi$  é o único parâmetro de distância relevante. (Veja Prob. 3.7 de Harvey Gould).

Note  $\beta_f$  tem unidade de  $L^{-D}$  ( $\beta_f$  é adimensional e  $\beta_f/V$  tem unidade de  $1/[V]$ ) e portanto perto do ponto crítico devemos ter  $\xi \sim t^{-\nu}$  e logo  $\beta_f \sim \frac{1}{\xi^D} \sim t^{\nu D}$

Assum a origem do hipótese de escala é que  $\xi$  é o único escala de comprimento importante. É como em  $T=T_c$   $\xi = \infty$ , o sistema não tem um comprimento característico e portanto deve ser invariante por mudanças na escala de comprimento

Intuitivamente ser invariante por escala significa que se uma parte do sistema é ampliado até se tornar tão grande quanto o sistema ele seria igual ao sistema. Isso ocorre na "figura abaixo" (que supostamente representa um floco de neve). Na verdade é um característica de figuras fractais.



## Construção de Kodanoff

Como vimos a hipótese de escale (homogeneidade do energia livre) leva ao comportamento crítico universal: leis de potência e expoentes críticos

Mos como justificar, microscopicamente, esta hipótese? Essa pergunta começou a ser respondida nos anos 70 com as ideias do grupo de renormalização; estas ideias são importantes em diversas áreas incluindo mat. cond, físico de partículas, plasma e turbulência

Para introduzir a construção de Kodanoff vamos utilizar o modelo de Ising mais uma vez.

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j - H \sum_{i=1}^N \sigma_i$$

↳ soma sobre próximas vizinhas

Para obter  $Z$  precisamos somar sobre todas as possíveis configurações microscópicas. Nos perto do ponto crítico o compr. de correlação  $\xi$  se torna muito maior que distância entre os spins:  $\xi \gg a$



Assim spins próximos estão altamente correlacionados e seus microestados são quase o mesmo: temos conjuntos cada vez maiores de spins altamente correlacionados. Este modo consideramos blocos (ou células) de tamanho  $b \ll \xi$  que contém  $b^d$  spins altamente correlacionados. Para cada um destas células introduzimos uma nova variável de spin  $\Theta_\alpha$ , com  $\alpha = 1, 2, \dots, N/b^d$ . Os valores de  $\Theta_\alpha$  dependem dos valores de  $\sigma_i$  dentro do bloco. Vamos assumir, ou impor, um registro de tal modo que os valores de  $\Theta_\alpha = \pm 1$ ; igual aos de  $\sigma_i$ .

O novo sistema tem  $N'$  "spins" com

$$N' = b^{-d} N$$

Estes  $N'$  spins estão arranjados numa rede onde a distância entre os sítios é

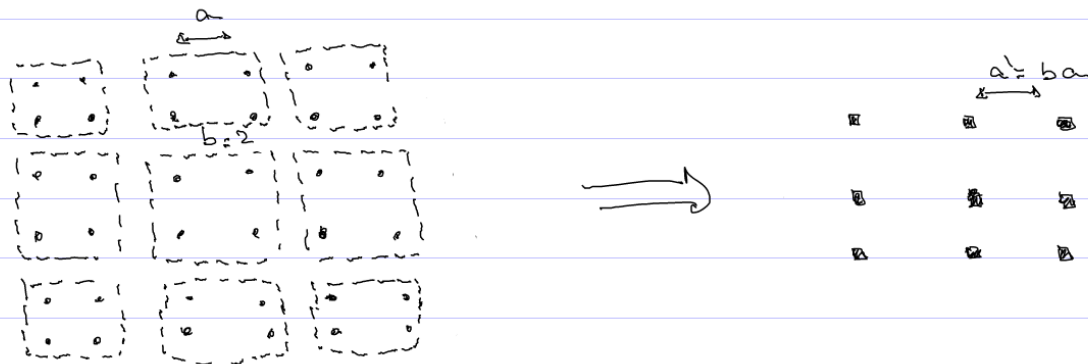
$$a' = ba$$

Para preservar a densidade dos graus de liberdade todos as distâncias espaciais são rescolados pelo fator  $b$  tal que (assim a nova rede continua com o mesmo parâmetro  $b$ )

$$r' = b^{-1} r$$

Em especial o comprimento de correlação é encolhido

$$\xi' = b^{-1} \xi$$



↳ podemos agrupar os spins de outras maneiras tb.

Assim assumimos que a nova Hamiltoniana do sist. tem a mesma forma do anterior

$$H' = -J' \sum_{\langle \alpha, \beta \rangle} \theta_\alpha \theta_\beta - H' \sum_{\alpha} \theta_\alpha = H(N', J', H')$$

mas com novos parâmetros  $J'$  e  $H'$ . Temos que usar alguma regra para obter o valor de  $\theta_\alpha$  que estamos restringimos a ser  $\pm 1$ . Uma opção é usar a regra do maioria: se a maior parte dos spins é  $+1$  então  $\theta_\alpha = 1$  e de modo análogo para  $-1$  (se houver empate podemos usar o valor que um spin qualquer). Note que há outras possibilidades de regras

Lembrando que  $T_c$  depende de  $J$  e assim a transformação de  $J \rightarrow J'$  é equivalente a mudança  $t \rightarrow t'$ .

O que fizemos no final foi uma mudança de escala, que imaginamos não alterar o sistema já que essa. Assim  $H'$  deve ser similar a  $H$ , mas renormalizada (com novos parâmetros  $J'$  e  $H'$ )

Tb podemos entender essa transf. em termos de  $Z$

$$Z = \sum_{\{\sigma, \tau\}} e^{-\beta H(\{\sigma, \tau\})}$$

Fazemos primeiro uma soma sobre um subconjunto de  $(N-N')$  spins e ficamos com uma soma sobre os  $N'$  spins que consideramos poder ser escrita como

$$Z = \sum_{\{\theta_\alpha\}} e^{-\beta H'}$$

Se  $Z$  pode ser escrita desta forma esperamos que o comportamento crítico de  $H$  e  $H'$  sejam parecidos

T3 é mostrar imaginar que a energia livre do novo sistema é igual ao do original. Na verdade a parte sing. do energia livre deve ser a mesma

$$N' f_s(t', H') = N f_s(t, H)$$

Assim

$$f_s(t, H) = b^{-d} f_s(t', H')$$

Para do ponto crítico  $t, t', H$  e  $H'$  são pequenos e assumimos que a relação entre eles é linear

$$t' = b^{\lambda_t} t$$

$$H' = b^{\lambda_H} H$$

O fato dos constantes podem ser escritas com  $b^{\lambda}$  nem de que as transf. de escala devem formar um semi-grupo

Logo

$$f_s(t, H) = b^{-d} f_s(b^{\lambda_t} t, b^{\lambda_H} H)$$

Assim obtemos que  $f_s$  é uma função homogênea. Como  $b$  pode ser qualquer escolhemos  $b^{\lambda_t} t = b_0^{\lambda_t}$ , ou seja  $b = b_0 t^{-1/\lambda_t}$  e temos

$$\begin{aligned} f(t, H) &= b_0^{-d} t^{d/\lambda_t} f(b_0^{\lambda_t}, b_0^{\lambda_H} H / t^{\lambda_H/\lambda_t}) \\ &= t^{d/\lambda_t} F(H / t^{\Delta}) \end{aligned}$$

Como esperado temos a forma de lei de escala e podemos obter os expoentes críticos em termos microscópicos a partir das transf. de escala.

Assim a construção de todo o  $f$  é explícita porque a energia livre é homogênea e portanto os termos divergências com leis de potência no ponto crítico. E como dito permite obter os expoentes críticos.

Além disso, conforme aplicamos a transf de escala obtendo diferentes sistemas com  $\mathcal{H}'(\vec{\sigma}', H')$ . Veremos que a transf. tem um ponto fixo onde

$$\xi' = b^{-1} \xi = \xi$$

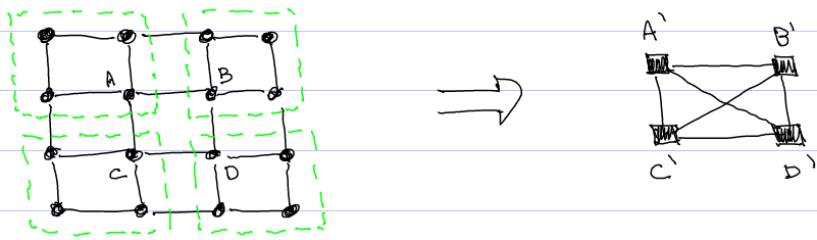
Ou seja no ponto fixo  $\xi$  é nulo ou infinito.  
 O ponto fixo onde  $\xi$  é nulo corresponde a uma fase estável.  
 E o ponto fixo onde  $\xi = \infty$  corresponde a um ponto crítico do modelo. No ponto crítico uma transf de escala não altera o sistema. Ele tem uma simetria por "dilatações no espaço espacial", é invariante sobre a transf. de escala e portanto não existe um escala de comprimento característica.

Assim a construção tb permite obter os pontos críticos e associa eles com  $\xi = \infty$

O problema da construção é que em geral a forma de  $\mathcal{H}$  não é preservado. Novos termos irão aparecer: interações entre spins mais distantes, ou interações de mais de dois corpos;  $\sigma_i \cdot \sigma_j \cdot \sigma_k$ , por exemplo. Assim a transf. de escala gera um fluxo no espaço de parâmetros de  $\mathcal{H}$ . Como a princípio qualquer termo que preserve a simetria de  $\mathcal{H}$  pode aparecer esse espaço de parâmetros tem dimensão infinita.

Em geral é difícil obter a transf. exatamente e temos que fazer aproximações

Para ver como o surgimento de novos interações pode aparecer vamos considerar rede quadrado com interações entre primeiros vizinhos, onde fazemos blocos com 4 spins.



Na rede original B e C só interagem indiretamente através de A (não há o termo  $\sigma_B \sigma_C$  em  $\mathcal{H}$ ). Mas na rede resolvida (efetivo) vão aparecer uma interação entre os blocos B' e C' (introdução de segundos vizinhos)

## Grupo de Renormalização

Se considerarmos  $\mathcal{H}(g_1, g_2, \dots)$  com  $g_i$  os parâmetros temos que a const. de escala fica

$$g_i' = R_b(g_i)$$

Perto do ponto crítico podemos linearizar a transf. e obter

$$g_i' = b^{\lambda_i} g_i$$

O expoente  $\lambda_i$  tem um papel relevante, já que se  $\lambda_i < 0$ , o parâmetro  $g_i' = b^{-|\lambda_i|} g_i$  se torna menor a cada transf. Assim após um número grande de transf. ele se torna desprezível. Já quando  $\lambda_i > 0$  o parâmetro  $g_i$  cresce e se torna importante. Assim fazemos a seguinte classificação para o  $g_i$

$\lambda_i > 0$  :  $g_i$  é chamado de variável relevante

$\lambda_i < 0$  :  $g_i$  é " " " " irrelevante

$\lambda_i = 0$  :  $g_i$  é " " " marginal

Na verdade a linearização do transf. perto do ponto crítico "mistura" os  $g_i$  ( $g_i$  pode depender dos outros  $g_i$ ). Mas pode encontrar novos variáveis onde a transf. é diagonal e são esses novos parâmetros que devemos considerar.

Note tb que cada  $g_i$  está associado a um operador em  $\mathfrak{sl}$  ( $\bar{v}$  com  $\bar{v}_i, \bar{v}_{i+1}$ , por exemplo) e assim a classificação se refere aos operadores.

Assim vemos que no ponto crítico (pts fixos do transf. de escala) os  $g_i$  não mudam e  $\mathfrak{sl}$  é invariante de escala. Agora alteramos um pouco  $\mathfrak{sl}$  em alguma direção ( $g_i \rightarrow g_i + \delta g_i$ ) e começamos a



aplicar transf. de escala podemos nos afastar do ponto crítico ou voltar a ele. Nos afastamos qnd  $\lambda_i > 0$  e o operador é relevante e nos aproximamos qnd  $\lambda_i < 0$ .

O grupo de renormalização é este processo de aplicar transf. de escala e renormalizar os parâmetros de st. Ao construir do const. de kudo no ff consideramos os novos parâmetros gerados. As transf. geram um fluxo no espaço de parâmetros onde podemos identificar os pontos críticos.

Falta ainda explicar a universalidade do comport. crítico. Para isso devemos analisar o que ocorre com a energia livre no caso onde temos novos parâmetros que chamaremos de  $g_1, g_2, \dots$ . Mantemos o parâmetro  $t$  e  $H$  que sabemos ser relevantes.

Quando fazemos uma transf. temos

$$f_s(t, H, g_1, g_2, \dots) = \frac{t^{d/\lambda_t}}{b_0^d} f_s(b_0^{\lambda_t}, b_0^{\lambda_H} H/t^{\lambda_H/\lambda_t}, b_0^{\lambda_{g_1}} g_1 t^{|\lambda_{g_1}|/\lambda_t}, \dots)$$

Se  $\lambda_i < 0 \rightarrow g'_i = b_0^{\lambda_i} g_i$  vai tender a 0 após muitas transf. Ou para  $t$  suf. pequeno

$$g'_i = b_0^{\lambda_i} t^{|\lambda_i|/\lambda_t} g_i \approx 0$$

e

$$f_s(t, H, g_1, g_2) \approx \frac{t^{d/\lambda_t}}{b_0^d} f_s(b_0^{\lambda_t}, b_0^{\lambda_H} H/t^{\lambda_H/\lambda_t}, 0, 0, \dots)$$

Assim vemos que suficientemente perto do ponto crítico o comportamento de  $f_s$  é governado somente pelos parâmetros (operadores) relevantes. Assim um sist que tenha outros termos em seu st perto

do ponto crítico o comport singular de  $f$  irá ser igual a de  $f_t$  com somente  $\bar{U}$  e  $H$ .

Os operadores marginais não afeta o comport. crítico como os relevantes, mas pode introduzir fatores logarítmicos as leis de potência convencionais.

O grupo de renormalização foi desenvolvido por Ken Wilson que ganhou o prêmio Nobel em 1982 por tal desenvolvimento.



## Renormalização dos modelos de Ising em 1D

Vamos aplicar a construção de Kadanoff no modelo de Ising que sabemos resolver exatamente

$$H = -J \sum_{i=1}^N \sigma_i \sigma_{i+1} - H \sum_{i=1}^N \sigma_i$$

$$Z = \sum_{\{\sigma_i\}} e^{K \sum \sigma_i \sigma_{i+1} + L \sum \sigma_i}$$

Há vários modos de "juntar" os spins em átomos.

Uma possibilidade é fazer uma soma sobre os spins pares e assim ficar somente com os ímpares, (ver 14.2.A do Pathria)

Vamos adotar este procedimento fazendo uso do formalismo de matriz transferência

$$\text{Temos } Z(T, H) = \text{Tr} [T^N]$$

Podemos agrupar os spins 2 a 2 fazendo  $T' = T^2$

$$Z(T, H) = \text{Tr} [T'^{N/2}]$$

É conveniente introduzir as variáveis auxiliares

$$u \equiv e^{-K} = e^{-\beta J} \in [0, 1)$$

$$v \equiv e^{-L} = e^{-\beta H} \in [0, 1)$$

Vamos nos restringir a  $H > 0$ , já que temos a simetria  $H \rightarrow -H$ .

Temos que

$$T = \begin{pmatrix} 1/u\sigma & u \\ u & \sigma/u \end{pmatrix} \quad T^1 = T^2 = \begin{pmatrix} u^2 + 1/u^2\sigma^2 & \sigma + 1/\sigma \\ \sigma + 1/\sigma & u^2 + \sigma^2/u^2 \end{pmatrix}$$

Para que a forma de  $\mathcal{H}$  e  $\mathcal{Z}$  não mude impondo

$$T^1 = C^1 \begin{pmatrix} 1/u'\sigma' & u' \\ u' & \sigma'/u' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'^2 + 1/u'^2\sigma'^2 & \sigma' + 1/\sigma' \\ \sigma' + 1/\sigma' & u'^2 + \sigma'^2/u'^2 \end{pmatrix}$$

Note que temos que introduzir uma nova constante  $C^1$  pois temos 3 eqs (matrizes são simétricas) e portanto precisamos de 3 incógnitas:  $u'$ ,  $\sigma'$  e  $C^1$ .

A introdução de  $C^1$  pode ser entendido como adicionar um termo constante  $\bar{J}_0$  em  $\mathcal{H}$ . Inicialmente podemos ter  $\bar{J}_0 = 0$ , mas veremos que  $\bar{J}_0 \neq 0$ . É possível mostrar que  $f$  no limite  $T \rightarrow \infty$  vai ser igual a  $-\bar{J}_0' = -\ln 2$ .

Note tb que  $C^1$  (e logo  $\bar{J}_0$ ) não afeta a transformação de  $u$  e  $\sigma$  (ou  $\bar{J}$  e  $\mathcal{H}$ ).  $\bar{J}_0$  (e  $C^1$ ) só afetam a parte regular do energia livre (Veja a discussão em 14.2.A do Pathria 3 ed.)

Resolvendo as 3 eqs acima obtemos

$$\sigma' = \frac{(u^2 + \sigma^2)^{1/2}}{(u^2 + 1/\sigma^2)^{1/2}}$$

$$u = e^{-\kappa} = e^{-\beta\sigma}$$

$$\sigma = e^{-L} = e^{-\beta H}$$

$$u' = \frac{(\sigma + 1/\sigma)^{1/2}}{(u^4 + 1/u^4 + \sigma^2 + 1/\sigma^2)^{1/4}}$$

$$C' = \left(\sigma + \frac{1}{\sigma}\right)^{1/2} \left(u^4 + \frac{1}{u^4} + \sigma^2 + \frac{1}{\sigma^2}\right)^{1/4}$$

Assim vemos que neste caso a forma de  $H$  se preserva e obtemos a transf. entre os parâmetros.

Podemos ver que estas transformações tem dois pontos fixos

$$1) \quad u^* = 0$$

$$\sigma^* = 1$$

$$\sigma' = \sqrt{\sigma^2} = \sigma$$

$$u' = \frac{(\sigma + 1/\sigma)^{1/2}}{(1 + 1/\infty + 2)^{1/2}} = 0$$

$$2) \quad u^* = 1$$

$$\sigma^* = \text{qualquer}$$

$$\sigma' = \sqrt{(1 + \sigma^2)/(1 + 1/\sigma^2)} = \sqrt{\sigma^2} = \sigma$$

$$u' = \frac{[(\sigma + 1/\sigma)^2 / (2 + \sigma^2 + 1/\sigma^2)]^{1/4}}{1} = 1$$

O ponto  $(0, 1)$  corresponde a  $\beta\bar{U} = \infty$  e  $H = 0$  ou seja a  $T = 0$  que é a temp. crítica

O "ponto"  $(1, 0)$  corresponde a  $\beta\bar{U} = 0$  e  $H = \infty$  ou seja a  $T = \infty$  e  $H$  qualquer que é a fase paramagnética fortemente desordenada (no verde de tempo um linha crítica)

Além disso o ponto

$(u^*, \sigma^*) = (0, 1)$  é instável: pontos ligeiramente afastados tendem a se distanciar quando aplicamos a konst. de escala

Na vizinhança de  $(0, 1)$  podemos linearizar a konst. fazendo  $u \ll 1$  e  $\sigma = 1 - w$  com  $w \ll 1$ . Assim

$$\sigma' = 1 - w' = \frac{\sqrt{u^4 + (1-w)^2}}{\sqrt{u^4 + (1-w)^{-2}}} \approx \sqrt{\frac{1-2w}{1+2w}} \approx (1-w)(1-w) \approx 1-2w$$

ou seja  $w' = 2w$

$$u' = \frac{\sqrt{1-w + (1-w)^{-1}}}{[u^4 + \bar{u}^4 + (1-w)^2 + (1-w)^{-2}]^{1/4}} \approx \frac{\sqrt{2 + \theta(w^2)}}{[u^4 + \bar{u}^4 + 2 + \theta(w^2)]^{1/4}} \approx \frac{\sqrt{2}}{\bar{u}^4 [u^8 + 3 + \theta(w^2)]^{1/4}}$$

$$u' \approx \sqrt{2} u$$

Lembrando que  $b=2$  e queremos algo no formato  $t' = b^{2t} t$  escrevemos

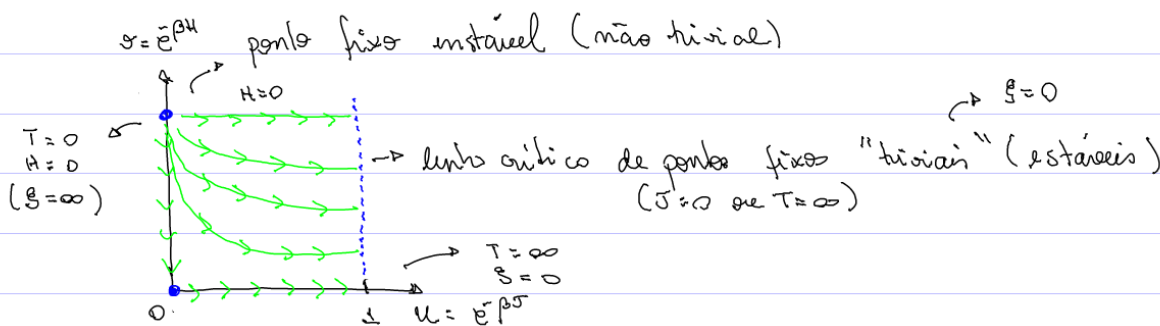
$$w' = 2^t w \quad \rightarrow \quad \lambda_w = 1$$

$$u' = 2^{\log_2 \sqrt{2}} u \quad \rightarrow \quad \lambda_u = \log_2 \sqrt{2} = 1/2 \quad (\text{exponente crítico})$$

Assim confirmamos que o ponto crítico  $(0,1)$  é instável: já que os expoentes  $\lambda_w$  e  $\lambda_u > 0$ . E este ponto é inacessível já que se você está nele ou é afasta do dele. Isso expressa o fato do sistema não ter ponto crítico físico, já que  $T=0$  é inacessível.

Pode-se verificar que o ponto (ou linha)  $(1,0)$  é estável.

Assim a construção de Kodono ff permite identificar os pontos fixos. Alguns deles podem ser pontos críticos



Infelizmente a transição a  $T=0$  é artificial o que dificulta a obtenção dos pontos fixos termo dinâmicos em termos dos expoentes críticos

